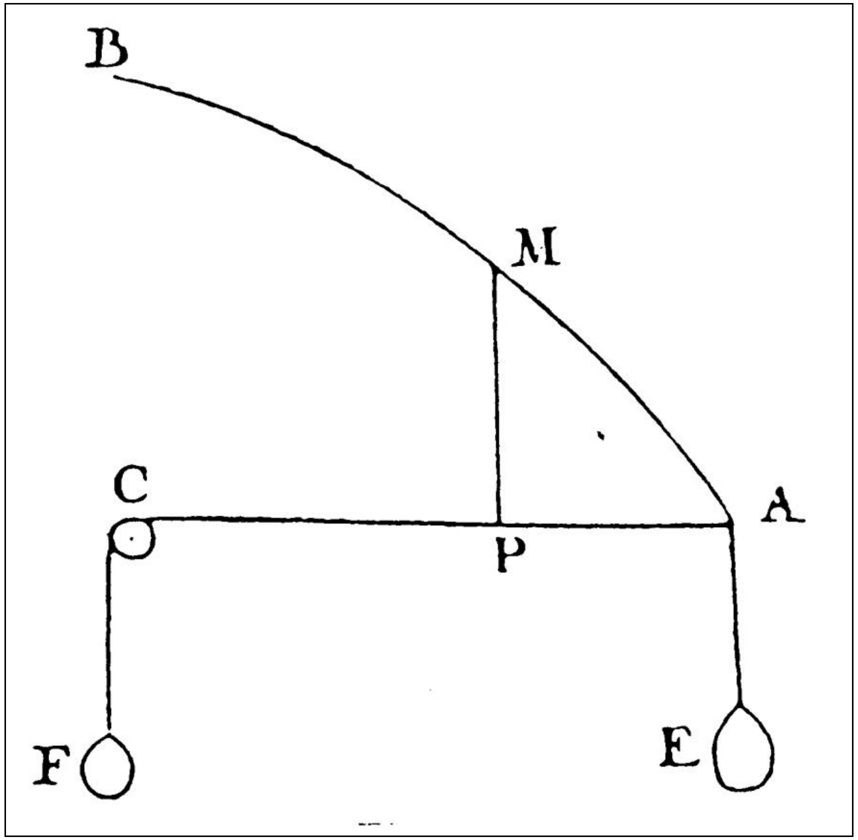
EULERO

faceva della matematica con la stessa naturalezza con cui gli uomini respirano e le aquile si mantengono in volo



02

abA in M vsque, Q. Erit ſumma momentorum potentiarum verticalium $=\int P dx$ (Lem. 2.) et ſumma momentorum potentiarum horizontalium $=\int Q dy$. Erit itaque tota vis in M agens $=Ex+Fy+\int P dx+\int Q dy$. Cui cum proportionalis eſſe debeat $\frac{v}{r}$, habebitur haec aequatio $\frac{Av}{r}=Ex+Fy+\int P dx+\int Q dy$. Si

03

METHODUS
INVENIENDI CURVAS
MAXIMI MINIMIVE PROPRIETATE GAUDENTES.

04

CAPUT PRIMUM.

De Methodo maximorum & minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere.

DEFINITIO I.

1. M*ETHODUS maximorum & minimorum ad lineas curvas applicata*, est methodus inveniendi lineas curvas, quæ maximi minimive proprietate quapiam propoſita gaudeant.

05

ADDITAMENTUM I.

De Curvis Elaſticis.

I.

JAm pridem ſummi quique Geometræ agnoverunt, Methodi in hoc Libro traditæ non ſolum maximum eſſe uſum in ipſa Analyſi, ſed etiam eam ad reſolutionem Problematum phyſicorum ampliſſimum ſubſidium afferre. Cum enim Mundi univerſi fabrica ſit perfectiſſima, atque a Creatore ſapientiſſimo abſoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quæpiam eluceat: quamobrem dubium prorſus eſt nullum, quin omnes Mundi effectus ex cauſis finalibus, ope Methodi maximorum & minimorum æque feliciter determinari queant, atque ex ipſis cauſis efficientibus.

06

Hoc modo, curvatura funis ſeu catenæ ſuſpenſæ duplici via eſt eruta; altera a priori, ex ſollicitationibus gravitatis; altera vero per Methodum maximorum ac minimorum, quoniam funis ejuſmodi curvaturam recipere debere intelligebatur, cujus centrum gravitatis infimum obtineret locum. Similiter curvatura radiorum per medium diaphanum variæ denſitatis tranſeuntium, tam a priori eſt determinata, quam etiam ex hoc principio, quod tempore breviſſimo ad datum locum pervenire debeant.

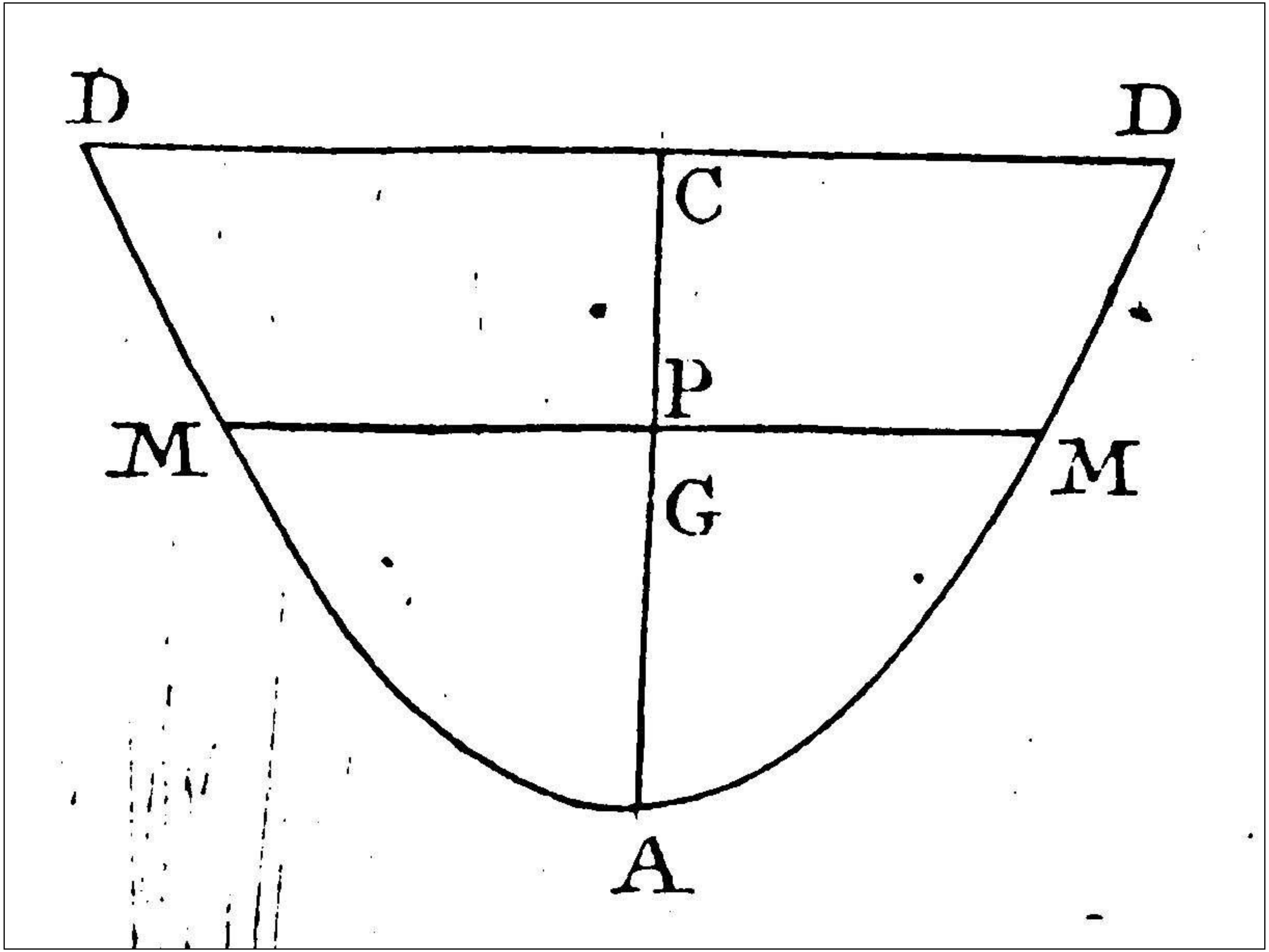
07

[Sic etſi figura, quam lamina elaſtica incurvata induit, jam pridem eſt cognita; tamen quemadmodum ea curva per Methodum maximorum & minimorum, hoc eſt, per cauſas finales, inveſtigari poſſit, a nemine adhuc eſt animadverſum.] Quamobrem cum Vir Celeberrimus, atque in hoc ſublimi naturam ſcrutandi genere perſpicaciſſimus, *Daniel* BERNOULLI mihi indicaſſet ſe univerſam vim, quæ in lamina elaſtica incurvata inſit, una quadam formula quam *vim potentialem* appellat, complecti poſſe; hancque expreſſionem in curva Elaſtica minimam eſſe oportere;

08

Poiché infatti la fabbrica dell'Universo è perfettissima ed è governata dal creatore più sapiente, non accade nulla nel mondo, in cui non traspaia qualche ragione di massimo e di minimo; per la qual cosa non può esservi alcun dubbio che tutti gli effetti della realtà possano essere determinati col metodo dei massimi e dei minimi in modo egualmente felice che mediante le stesse cause efficienti

09


D
D
C
P
M
M
G
A

(1742: lettera di Daniele Bernoulli ad Eulero)

Vostra Signoria potrebbe riflettere un poco se uno non potesse dedurre la curvatura direttamente dai principi della meccanica ... Voi facilmente risolverete questo problema di rendere

$$\int \frac{ds}{r^2} \text{ minimo}$$

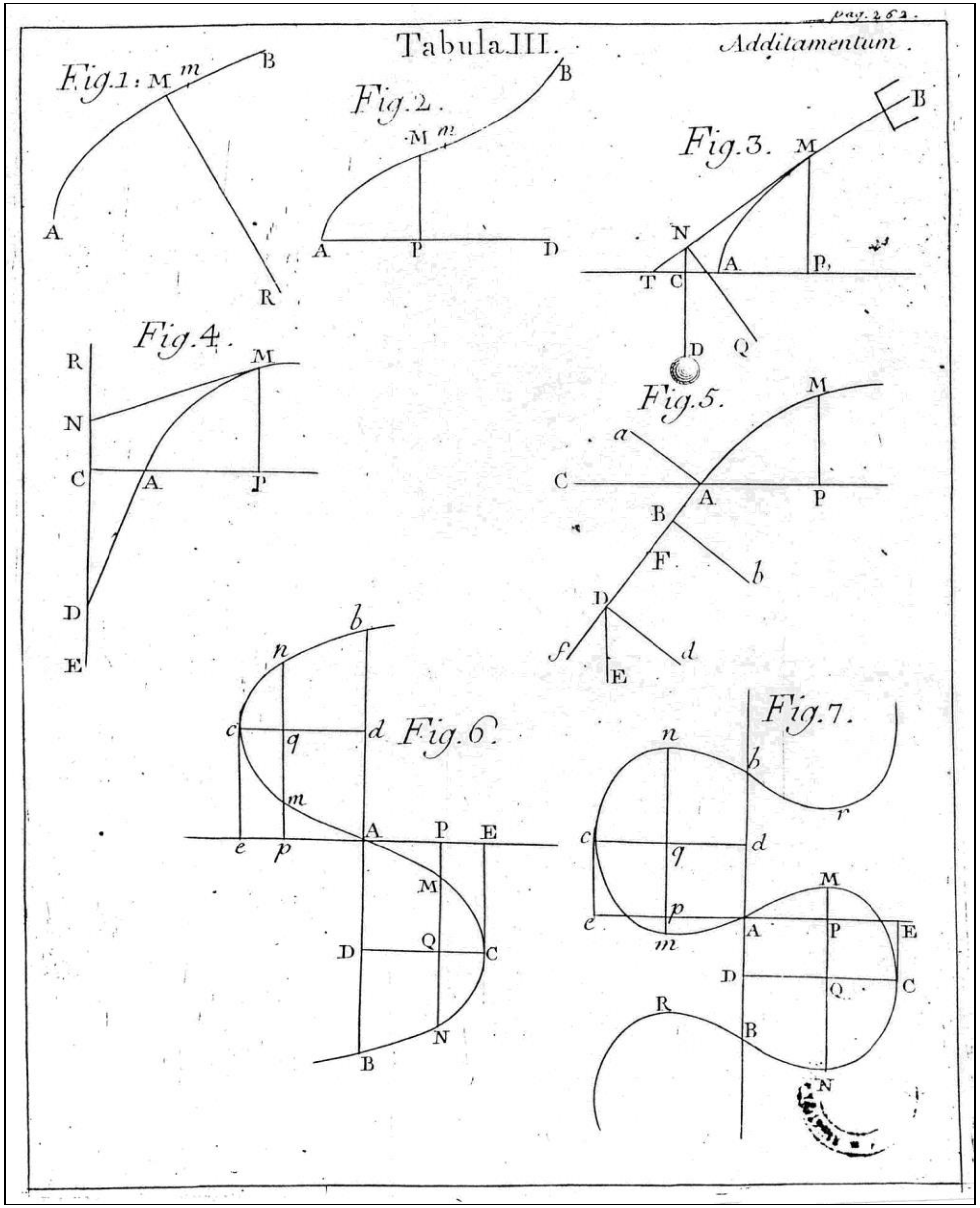
11

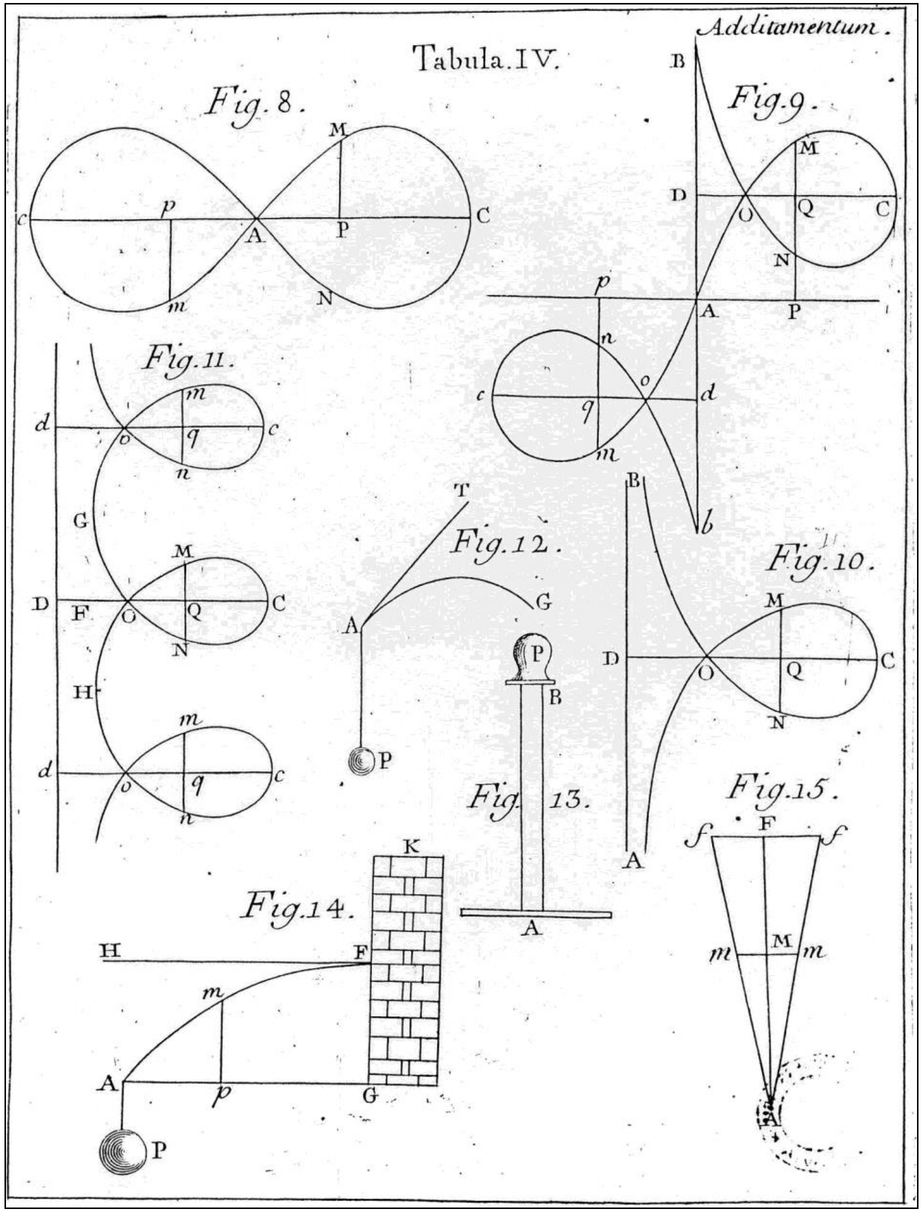
ricerca di minimo

$$\frac{1}{2}\int EJ\,\frac{ds}{r^2}$$

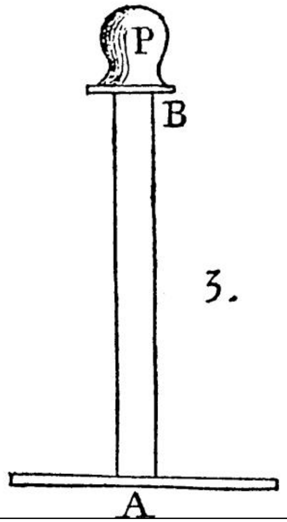
energia potenziale elastica di una trave di sezione omogenea

12


pag. 262.
Tabula III.
Additamentum.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.


Additamentum.
Tabula IV.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

Le cose che sono state annotate sulla prima specie possono riuscir utili a giudicare le sollecitazioni delle colonne. Sia data infatti la colonna AB, fissata verticalmente sulla base A, portante il peso P.



15

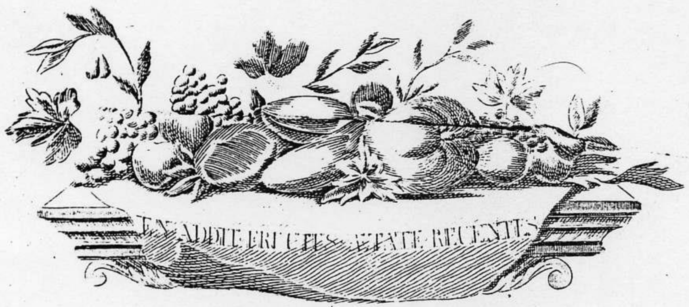
Se la colonna è fatta in modo da non potersi rompere a causa di P, ancorché grande, l'unica cosa da temere è l'inflessione della colonna (...)
Restando costante l'elasticità assoluta (cioè il termine EJ che oggi chiamiamo rigidezza flessionale) *il peso P che può essere portato senza pericolo è inversalmente proporzionale al quadrato della lunghezza della colonna, e una colonna lunga il doppio può portare solo un quarto di quel peso.*
Queste considerazioni dovrebbero essere tenute in conto per le colonne lignee che sono quelle più facili ad incurvarsi (Eulero, 1744)

16

NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XV.

pro Anno MDCCLXX.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

MDCCLXXI.

GENVINA

PRINCIPIA DOCTRINAE

DE STATV AEQVILIBRII ET MOTV CORPORVM TAM PERFECTE FLEXIBILIVM QVAM ELASTICORVM.

Auctore

L. EVLERO.

02

Problema generale.

Si filum ſiue perfecte flexile ſiue elaſticum et in ſingulis punctis a viribus quibuscunque ſollicitatum ad ſtatum aequilibrii fuerit perductum; pro ſingulis eius elementis ſtatum ſiue tenſionis, ſiue inflexionis inueſtigare.

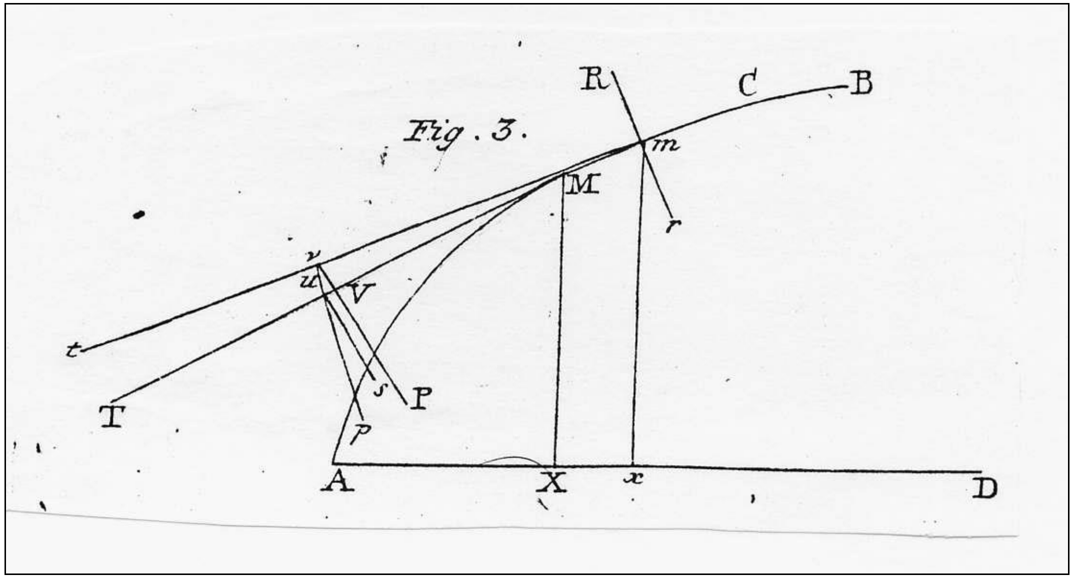
03

Quum enim pleraeque ſolutiones, quae paſſim ſuper hoc argumento reperiuntur, vel ex principiis tantum particularibus vel ſaltem non ſatis claris et perſpicuis ſint deductae, [operam dabo vt vera et generalia principia, quibus determinatio figurae huiusmodi corporum innititur ita dilucide exponam,] vt non ſolum ſtatus aequilibrii, ſed etiam motus huiusmodi corporum inde inueſtigari queat.

04

quare, [ſi elaſticitas filo inſit, vis ea quam quaerimus non ſolum ſecundum tangentem MT erit directa, ſed etiam vis quaedam obliqua adeſſe debet, cuius momentum incuruationem in puncto *m* ſuſtinere valeat.]

05



06

XI. Hae igitur quatuor vires aequiualere debent, his quatuor viribus iunctim ſumtis:

I°. ſec. $MT = T$ II°. ſec. $VP = V$,

III°. vi elementari ſec. $mM = pds$ et IV°. ſec. $mr = qds$

quare hinc primo tangentiales ſecundum mT agentes, ſeorſim inter ſe debent aequari, vnde naſcitur haec aequatio:

$$T + dT + Vd\Phi + dV.\, d\Phi = T + pds,$$

ex qua concluditur

$$dT + Vd\Phi = pds.$$

Secundo vires normales quatenus in eandem partem tendunt, ſeorſim debent eſſe aequales, vnde fit

$$-(T + dT)d\Phi + dV = V + qds \quad \text{hincque}$$

$$dV - Td\Phi = qds.$$

Tertio vero inſuper requiritur, vt etiam momenta virium normalium, inter ſe conueniant, ſumtis igitur momentis reſpectu puncti m, prodit haec aequatio:

$$-(T + dT)d\Phi.\, o + (V + dV)(v + dv) = V(v + ds) + qds.\, o$$

vnde concluditur

$$vdV + Vdv = Vds, \quad \text{ſiue } d.\, Vv = Vds$$

atque his tribus aequationibus omnia continentur, quae ad problematis noſtri ſolutionem pertinent.

07

08

$$dT + V \cdot d\Phi = p \cdot ds \qquad \frac{dT}{ds} + V \cdot \frac{d\Phi}{ds} - p = 0$$

$$dV - T \cdot d\Phi = q \cdot ds \qquad \frac{dV}{ds} - T \cdot \frac{d\Phi}{ds} - q = 0$$

$$d \cdot (Vv) = V \cdot ds \qquad \frac{d(Vv)}{ds} = V$$

09

$$\frac{dN}{ds} + \frac{V}{r} + p = 0 \qquad \frac{dN}{dz} + p = 0$$

$$\frac{dV}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0 \qquad r \to \infty \qquad \frac{dV}{dz} + q = 0$$

$$\frac{dM}{ds} = V \qquad \frac{dM}{dz} = V$$

Casus Primus pro filis perfecte flexibilibus.

Iam obseruauimus hoc casu vires normales V euanescere debere, quo pacto tertia aequatio inuenta sponte disparet, duae priores vero nobis suppeditant has aequationes:

I. $dT = pds$ et II. $-Td\Phi = qds$

Casus Secundus pro filis vniformiter elasticis.

Casus Tertius pro filis inaequaliter elasticis.

Casus Quartus pro filis elasticis, quae in statu naturali curuaturam habent datam.

NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOM. XX.
pro Anno MDCCLXXV.

286 (o)

DE
GEMINA METHODO TAM
AEQVILIBRIVM
QVAM MOTVM CORPORVM
FLEXIBILIVM
DETERMINANDI,
ET
VTRIVSQVE EGREGIO CONSENSV.

Auctore

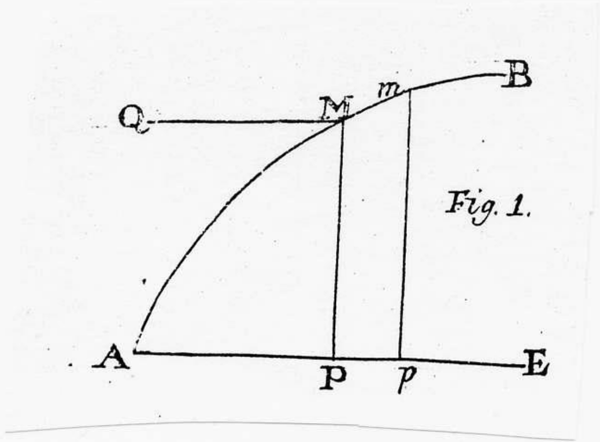
L. EVLERO.

Iam in *Tomo III. Commentariorum priorum Academiae Imperialis* expoſui methodum vniuerſalem, inueniendi figuram, quam filum ſiue perfecte flexile ſiue inſuper elaſticum a potentiis quibuscunque ſollicitatum, induere debet, vt in aequilibrio conquieſcat. Methodus autem haec doctrina momentorum innitebatur; quandoquidem ſumma omnium momentorum, quae ex ſingulis viribus ſollicitantibus naſcuntur, pro quouis fili puncto cum eius elaſticitate vbique in aequilibrio conſiſtere debet. Deinde vero non ita pridem in *Tomo XV. nouorum Commentariorum* longe aliam methodum tradidi easdem quaeſtiones reſoluendi, quae notioni tenſionum qua ſingula fili elementa afficiuntur erat innixa.

12

Formulae autem quibus haec ſolutio poſterior continetur, tantopere a ſolutione priori diſſidere videntur, vt primo intuitu vix vllum conſenſum perſpicere liceat; cuius diuerſitatis ratio manifeſto in eo eſt poſita, quod haec duo principia, alterum ſcilicet momentorum, alterum tenſionum tantopere a ſe inuicem diſcrepant, vt nihil commune habere videantur. Quin etiam, niſi pro huiusmodi problematibus determinatis ex vtraque methodo eadem plane ſolutio eliceretur, merito quis dubitare poſſet, num iſtae duae methodi inter ſe conuenirent, quod quidem dubium me ipſum non ſemel haeſitantem reliquit. Quam ob rem Geometris munus haud ingratum me eſſe oblaturum confido, ſi egregium conſenſum inter haec duo principia toto coelo a ſe inuicem diuerſa dilucide demonſtrauero.

13



14

§. 6. Cum igitur ex omnibus viribus arcui A M applicatis oriatur momentum ad curuaturam augendam tendens $= \int dx \int P\,ds - \int dy \int Q\,ds$; hoc vtique elasticitati aequale poni debet; vnde istam adipiscimur aequationem:

$$\int dx \int P\,ds - \int dy \int Q\,ds = \frac{S\,d\Phi}{ds}$$

15

finiri queat. Neque vero hinc symptomata, quae figuram laminae comitantur, cognoscere licet, cuiusmodi sunt: tensio quam singula elementa sustinent; tum vero etiam vires normales ad curuaturam cuiusque elementi producendam requisitas; quem defectum per alteram methodum, cuius explicatio sequitur, supplere sum conatus.

16

Solutio posterior ex principio tensionum petita.

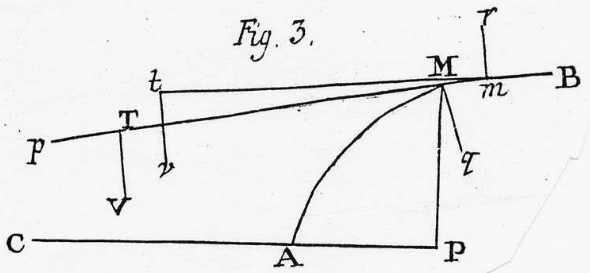


Fig. 3.

§. 12. Has igitur quatuor aequationes ex ratiocinio superiori deductas eodem ordine repraesentemus quo eas in *Tomo XV. Comment. pag.* 329. retulimus

$$\text{I. } dT + V\,d\Phi = p\,ds$$
$$\text{II. } dV - T\,d\Phi = q\,ds$$
$$\text{III. } V\,ds = d.\,V\,v$$

quibus adiungi debet principalis hic primo loco inventa

$$\text{IV. } V\,v = \frac{s\,d\Phi}{ds}$$

vbi intuenti nulla prorsus conuenientia cum praecedente solutione patebit. Vnde eo magis necessarium videtur, pulcherrimum consensum inter has duas solutiones toto coelo quasi a se inuicem discrepantes demonstrare.

$$\text{I)} \quad dT + V \cdot d\varphi = p \cdot ds$$
$$\text{II)} \quad dV - T \cdot d\varphi = q \cdot ds$$
$$\text{III)} \quad V \cdot ds = d(Vv)$$

$$Vv = S \cdot \frac{d\varphi}{ds} \qquad \text{III')} \quad V \cdot ds = \frac{d(S \cdot d\varphi)}{ds^2}$$

19

Demonſtratio conſenſus inter has duas ſolutiones.

atque haec aequatio manifeſto eſt prorſus eadem, ad quam nos prior methodus ex doctrina momentorum petita deduxerat, ita vt nunc quidem pulcherrimus conſenſus vtriusque methodi clariſſime eluceat. Verum methodus poſterior priori vtique maxime antecellit, cum nobis non ſolum figuram laminae exhibeat, ſed etiam ſtatum violentum, in quo ſingula laminae elementa reperiuntur declaret.

20