NAVIER

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS ET DES MACHINES.

PREMIÈRE PARTIE

CONTENANT LES LEÇONS SUR LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN TERRE, EN MAÇONNERIE ET EN CHARPENTE.

PREMIÈRE SECTION.

DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

PAR **NAVIER,**

Membre de l'Institut (Académie des sciences), Inspecteur divisionnaire des Ponts et chaussées, professeur d'analyse et de mécanique à l'École polytechnique, etc.

Troisième édition

AVEC DES NOTES ET DES APPENDICES,

PAR

M. BARRÉ DE SAINT-VENANT,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, ancien professeur adjoint de mécanique à l'École des ponts et chaussées, et professeur de génie rural à l'Institut agronomique, membre de la Société philomathique de Paris, etc.

TOME Ier. — FASCICULE I.

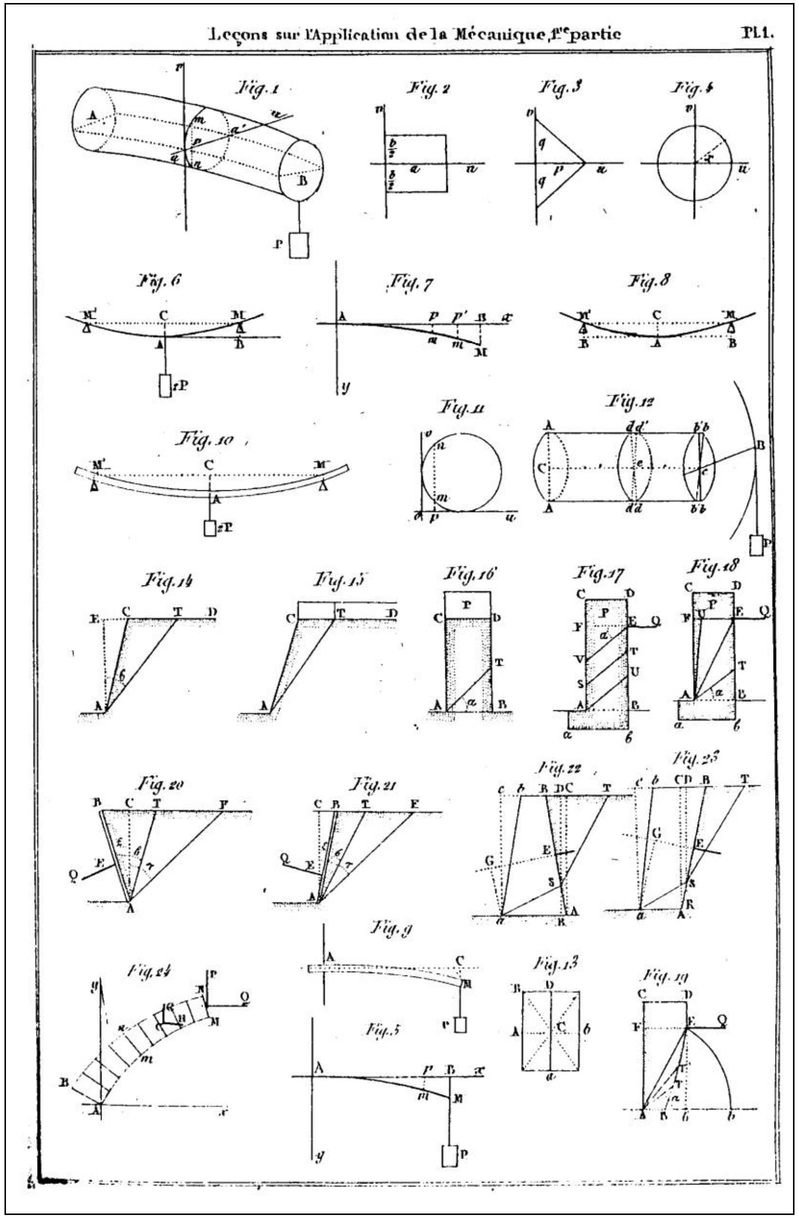
PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,
Quai des Augustins, 49.

1864

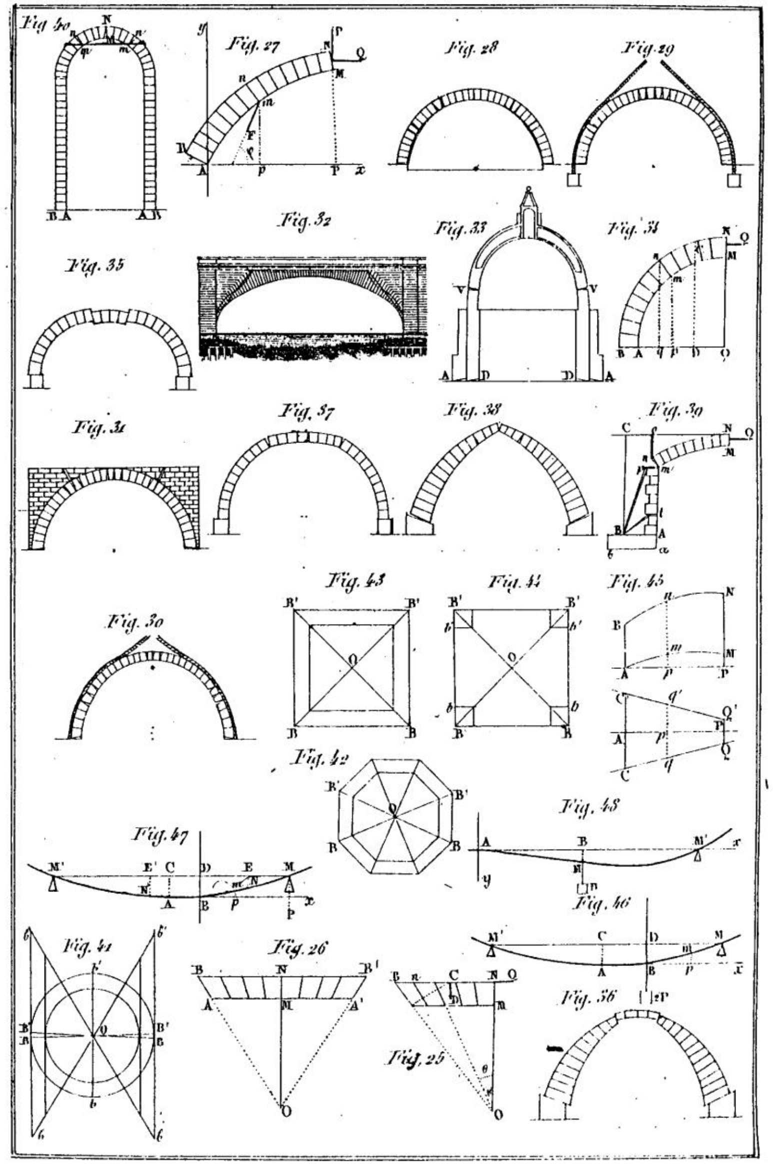
01



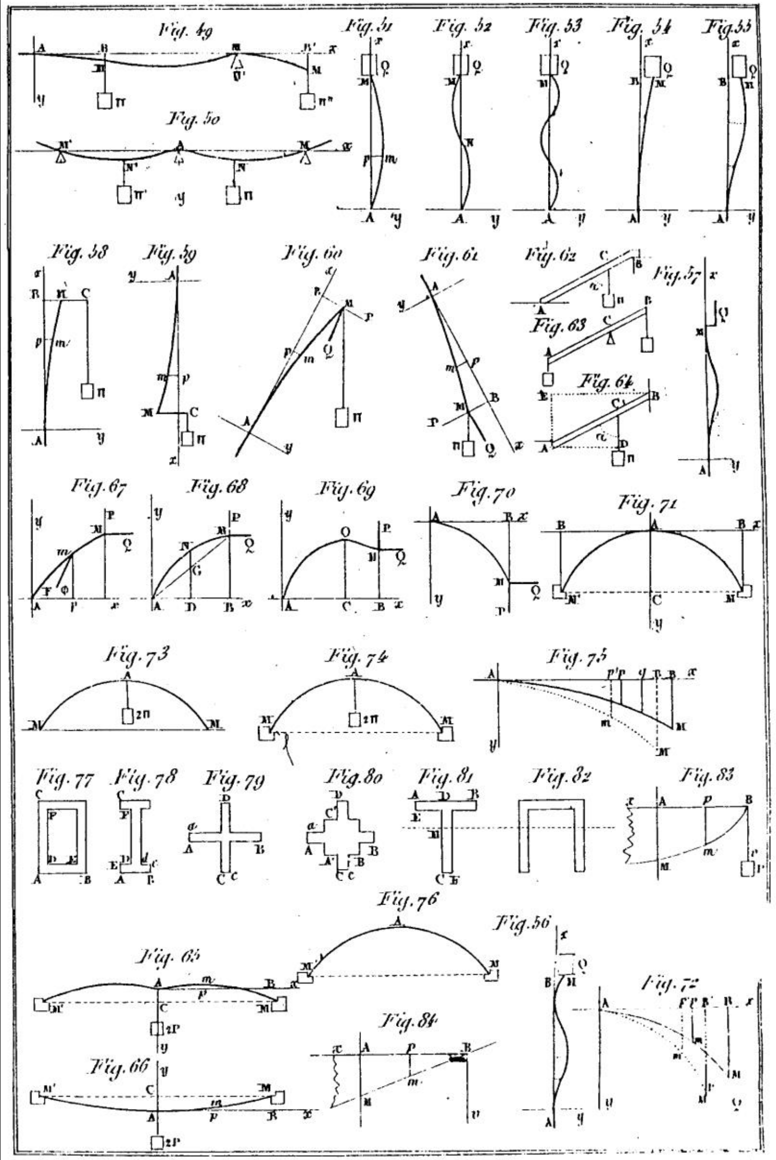
02

NAVIER

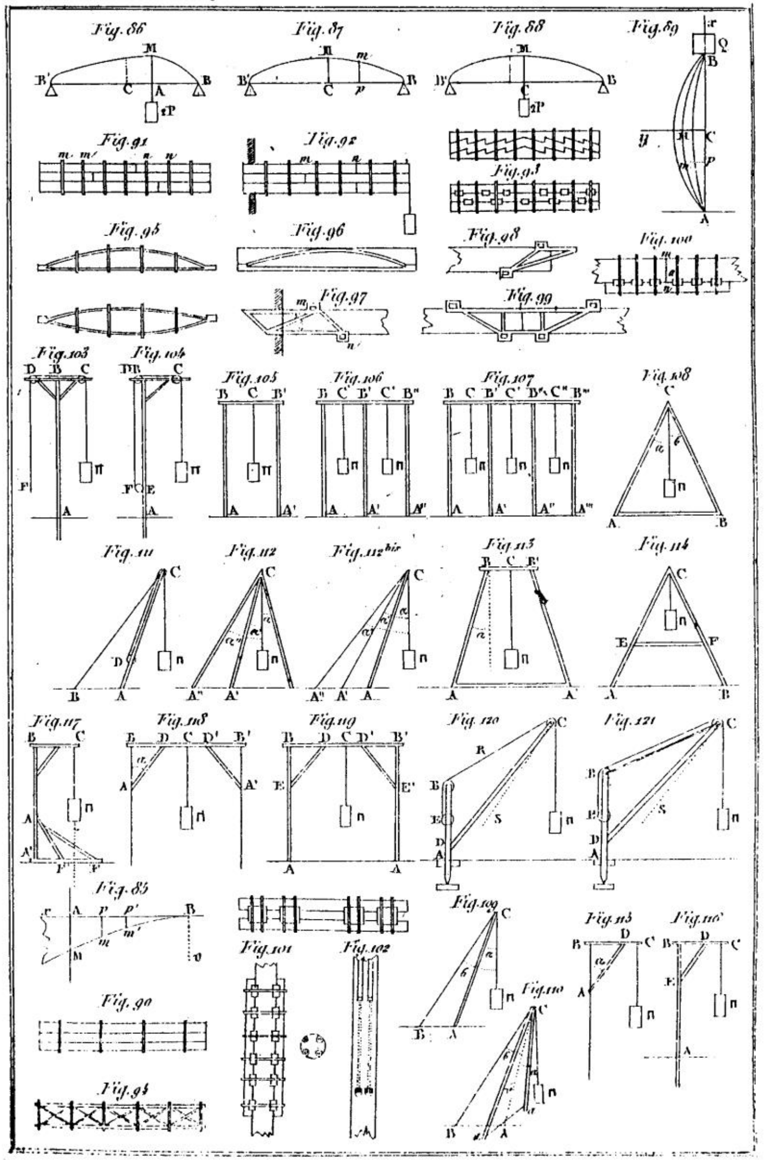
Leçons sur l'Application de la Mécanique, 1re partie — Pl. II



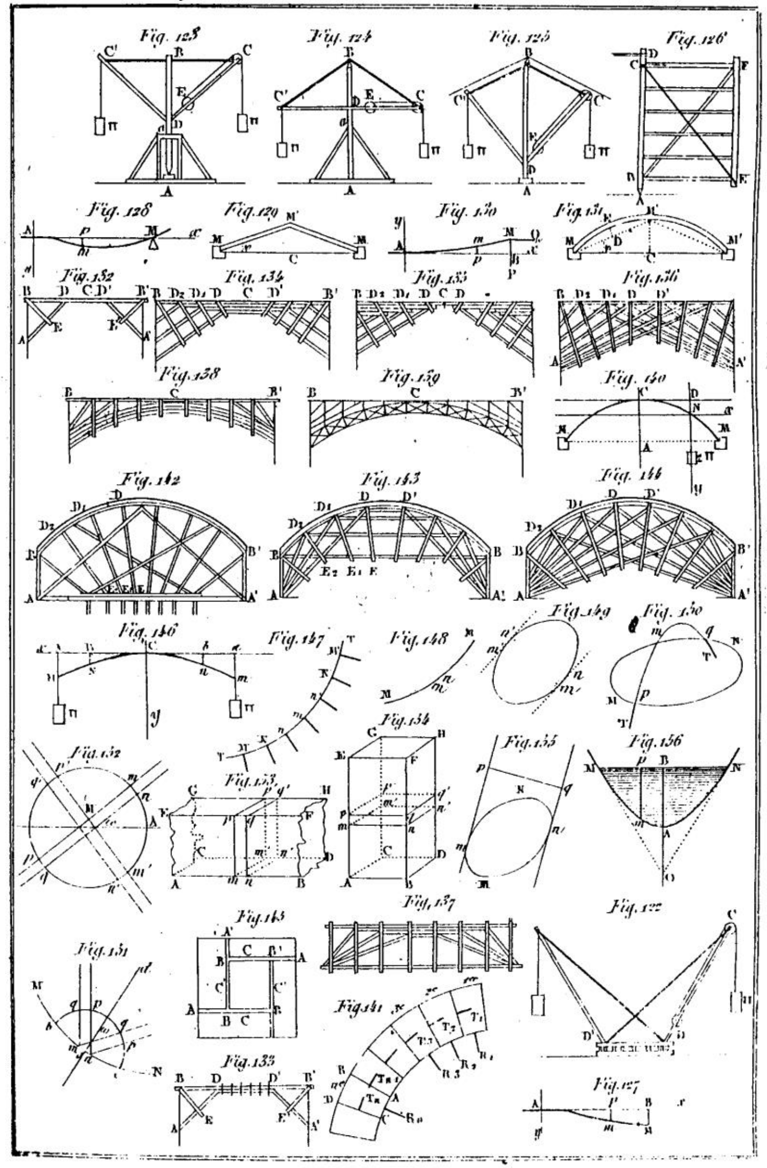
Leçons sur l'Application de la Mécanique, 1re partie — Pl. III



Leçons sur l'Application de la Mécanique, 1re partie. Pl. IV



Leçons sur l'Application de la Mécanique, 1re partie. Pl. V



07

RÉSUMÉ DES LEÇONS

DONNÉES

A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES,

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉCANIQUE

A L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS

ET DES MACHINES.

PREMIÈRE PARTIE.

PREMIÈRE SECTION.

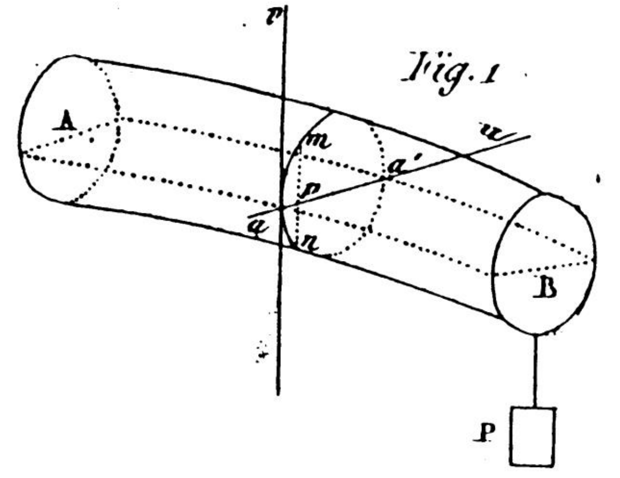
DE LA RÉSISTANCE DES CORPS SOLIDES.

ARTICLE III.

DE LA RÉSISTANCE D'UN CORPS PRISMATIQUE A LA FLEXION PRODUITE PAR UN EFFORT DIRIGÉ PERPENDICULAIREMENT A LA LONGUEUR DE CE CORPS.

77. Quand un corps prismatique est fléchi, les fibres situées du côté de la face convexe sont allongées; les fibres situées du côté de la face concave sont accourcies; certaines fibres, situées dans l'intérieur du corps, conservent une longueur invariable. En admettant, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, que les fibres opposent à l'allongement et à l'accourcissement des résistances proportionnelles aux quantités dont les longueurs de ces fibres varient, on peut se rendre compte de la manière dont un corps résiste à la flexion.

08



Soit un solide prismatique droit (Fig. 1), encastré horizontalement à l'extrémité A, et fléchi par l'action d'un poids P suspendu à l'autre extrémité B. Considérons une section transversale quelconque *mana'*. Soit *aa'* la ligne horizontale qui est la section des fibres dont la longueur n'a pas varié.

On nommera

E la force nécessaire pour allonger ou pour accourcir un prisme dont la section transversale est l'unité superficielle, d'une quantité égale à la longueur de ce prisme ;

ρ le rayon du cercle osculateur de la courbe du solide, au point où est faite la section transversale *mana'*;

u l'abscisse d'un point quelconque de la section *ama'n*, comptée sur *aa'*;

v l'ordonnée d'un point quelconque de cette section, prise perpendiculairement à *aa'*;

b la plus grande valeur u;

$f_1 u$ l'ordonnée *pm* de la courbe qui termine la partie de la section transversale où les fibres s'allongent;

$f_2 u$ l'ordonnée *pn* de la courbe qui termine la partie où les fibres s'accourcissent;

x la distance de la section transversale *ama'n* à l'extrémité encastrée;

a la distance du point d'application du poids P à l'extrémité encastrée, qui ne diffère pas sensiblement de la longueur AB du solide.

78. On aura donc pour exprimer l'équilibre des forces horizontales, condition qui détermine la situation de l'axe aa',

$$\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv.v = \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv.v.$$

L'axe aa' passe par le centre de gravité de la section transversale $mana'$.

79. On aura ensuite, pour exprimer l'équilibre de rotation autour de cet axe,

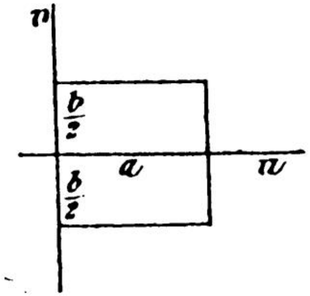
$$\frac{E}{\rho}\left(\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv.v^2 + \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv.v^2\right) = P(a-x).$$

80. La quantité

$$E\left(\int_0^b du \int_0^{f_1 u} dv.v^2 + \int_0^b du \int_0^{f_2 u} dv.v^2\right)$$

a, pour chaque corps, une valeur qui dépend de la nature de ce corps et de la figure de la section transversale. Cette quantité est le *moment de la résistance à la flexion,* ou plus simplement le *moment de flexion* du corps. Nous la représenterons ci-après par la lettre ε.

Fig. 2

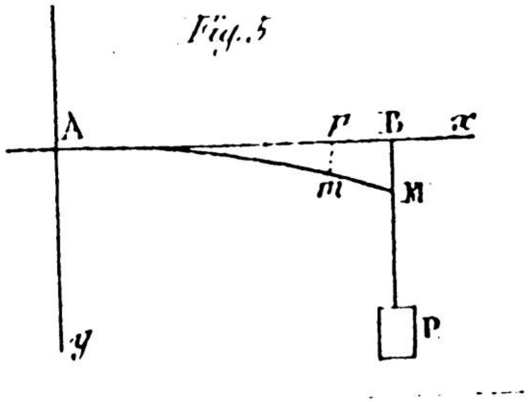


81. Si la figure de la section est un rectangle (Fig. 2), dont b et c soient la largeur et la hauteur, la valeur du moment de résistance à la flexion est

$$\varepsilon = 2E\int_0^b du \int_0^{\frac{1}{2}c} dv.v^2 = E\frac{bc^3}{12}.$$

Ainsi la résistance à la flexion est proportionnelle à la largeur et au cube de la hauteur du solide.

Fig. 5



86. Considérons, comme dans le n° 77, un solide prismatique droit (Fig. 5), encastré horizontalement à une extrémité A, et chargé à l'autre extrémité M d'un poids.

Nommons

x l'abscisse Ap d'un point m de la courbe du solide, comptée sur l'horizontale AB;

y l'ordonnée pm;

ρ le rayon du cercle osculateur de la courbe du solide en m;

P le poids placé à l'extrémité M du solide;

a la distance horizontale AB des deux extrémités du solide;

f l'ordonnée BM de l'extrémité de la courbe;

s la longueur AmM du solide;

α l'angle formé avec l'horizon par la tangente de la courbe du solide à l'extrémité M;

ε la valeur du moment de résistance à la flexion du solide, dont l'expression générale est donnée n° 80.

L'équation d'équilibre du n° 79 est

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \mathrm{P}\,(a-x),$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{P}\,(a-x);$$

et dans le cas où la flexion est très-petite, ce qui permet de négliger le quarré de $\dfrac{dy}{dx}$, on a

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{P}\,(a-x),$$

QUATRIÈME SECTION.

DE L'ÉQUILIBRE ET DE L'ÉTABLISSEMENT DES CONSTRUCTIONS EN CHARPENTE.

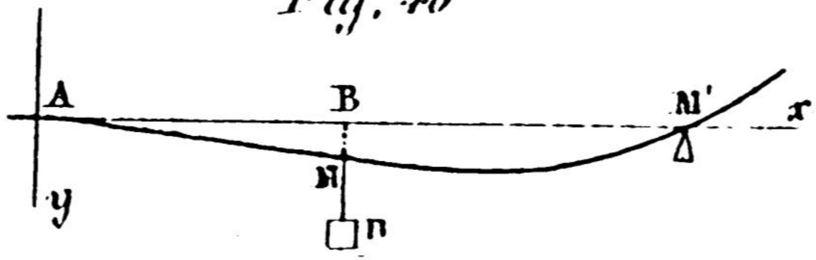
354. Chaque pièce d'une construction en charpente doit offrir une résistance proportionnée aux efforts quelle peut avoir à supporter.

On se formera une idée précise du degré de résistance qu'une pièce doit présenter si l'on remarque que l'effet d'un changement de figure quelconque subi par une pièce, en vertu des actions auxquelles elle est exposée, est toujours d'allonger ou d'accourcir dans une certaine proportion les fibres de cette pièce. Si l'allongement ou l'accourcissement étaient trop considérables, la pièce romprait, ou par une disjonction, ou par un écrasement. Les allongements ou accourcissements dont il s'agit doivent toujours être beaucoup moindres que ceux qui amèneraient la rupture; mais on doit, dans tous les cas, les regarder comme donnant la mesure de la fatigue à laquelle la pièce est exposée. D'après cela, dans chaque cas particulier, la question se réduit à examiner, étant donné une pièce et les efforts qu'elle doit supporter, dans quelle proportion les fibres sont le plus allongées ou le plus accourcies. Si cet allongement ou cet accourcissement répond à une tension ou à une compression qui ne dépassent point les limites indiquées dans l'article VII de la première section (nos 173 et suivants), on est assuré que la pièce aura la force demandée.

ARTICLE PREMIER.

DE LA RÉSISTANCE D'UNE PIÈCE PRISMATIQUE POSÉE HORIZONTALEMENT, CHARGÉE ET SUPPORTÉE DE DIVERSES MANIÈRES.

Fig. 48



ÉQUILIBRE D'UNE PIÈCE CHARGÉE D'UN POIDS, DONT L'UNE DES EXTRÉMITÉS EST ENCASTRÉE ET L'AUTRE EXTRÉMITÉ POSÉE SUR UN APPUI.

366. La pièce AMM' (Fig. 48) encastrée horizontalement à l'extrémité A, supportée à l'extrémité M' sur un appui placé sur la même ligne horizontale que le point A, étant chargée en M du poids Π, on nommera

a la distance AB;

a' la distance AM';

Π' l'effort exercé sur l'appui M';

(ε et ρ auront les significations indiquées n° 359.)

On aura en premier lieu, pour la portion AM de la pièce,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Pi\,(a-x) - \Pi'\,(a'-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \Pi\left(a\,x - \frac{x^2}{2}\right) - \Pi'\left(a'\,x - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$y = \Pi\left(\frac{a\,x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right) - \Pi'\left(\frac{a'\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

On aura ensuite pour la portion MM′, en déterminant les constantes de manière que, pour $x=a$, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et y soient égales à celles qui seraient données par les équations précédentes,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,\Pi'\,(a'-x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \Pi\,\frac{a^2}{2} - \Pi'\left(a'\,x - \frac{x^2}{2}\right),$$

$$y = \left(\frac{a^2\,x}{2} - \frac{a^3}{6}\right) - \Pi'\left(\frac{a'\,x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

367. Cette dernière expression de y devant être nulle quand $x=a'$, on aura

$$\Pi' = \Pi\,\frac{a^2\,(3\,a'-a)}{2\,a'^3}$$

pour l'effort exercé sur le point d'appui M′.

ÉQUILIBRE D'UNE PIÈCE SUPPORTÉE PAR TROIS, OU PAR UN PLUS GRAND NOMBRE DE POINTS D'APPUI.

375. Quand une verge rigide chargée de poids est soutenue sur un nombre de points d'appui plus grand que 2, les efforts que chacun de ces points d'appui doit supporter sont indéterminés entre certaines limites. Ces limites peuvent toujours être fixées par les principes de la statique. Mais, si l'on suppose la verge élastique, l'indétermination cesse entièrement. On considérera seulement ici une des questions de ce genre le plus simples qui puissent être proposées.

On supposera la pièce MM′ (Fig. 50) posée horizontalement sur trois points d'appui, placés, l'un au milieu A de la longueur de cette pièce, et les deux autres aux extrémités M, M′. Chaque moitié de la pièce est chargée au milieu N, N′, d'un poids Π, Π′. Il s'agit de déterminer la figure affectée par la pièce, et les efforts exercés sur chaque point d'appui.

Fig. 50

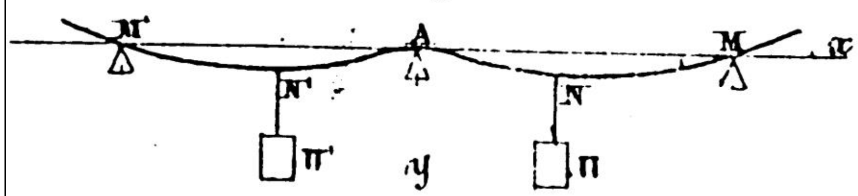
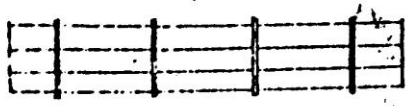


Fig. 90



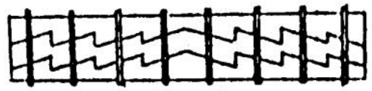


Fig. 93

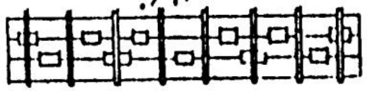


Fig. 94

Fig. 138

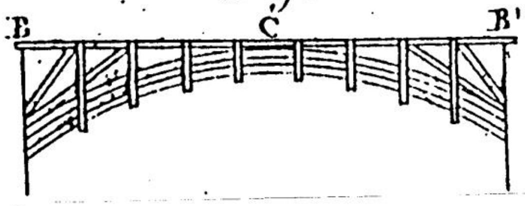


Fig. 139

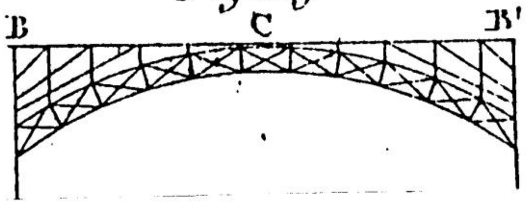


Fig. 5

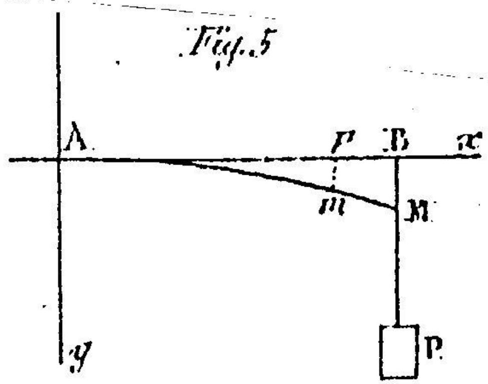
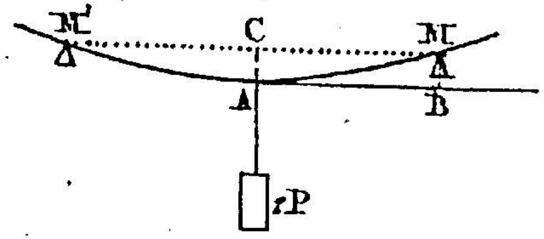
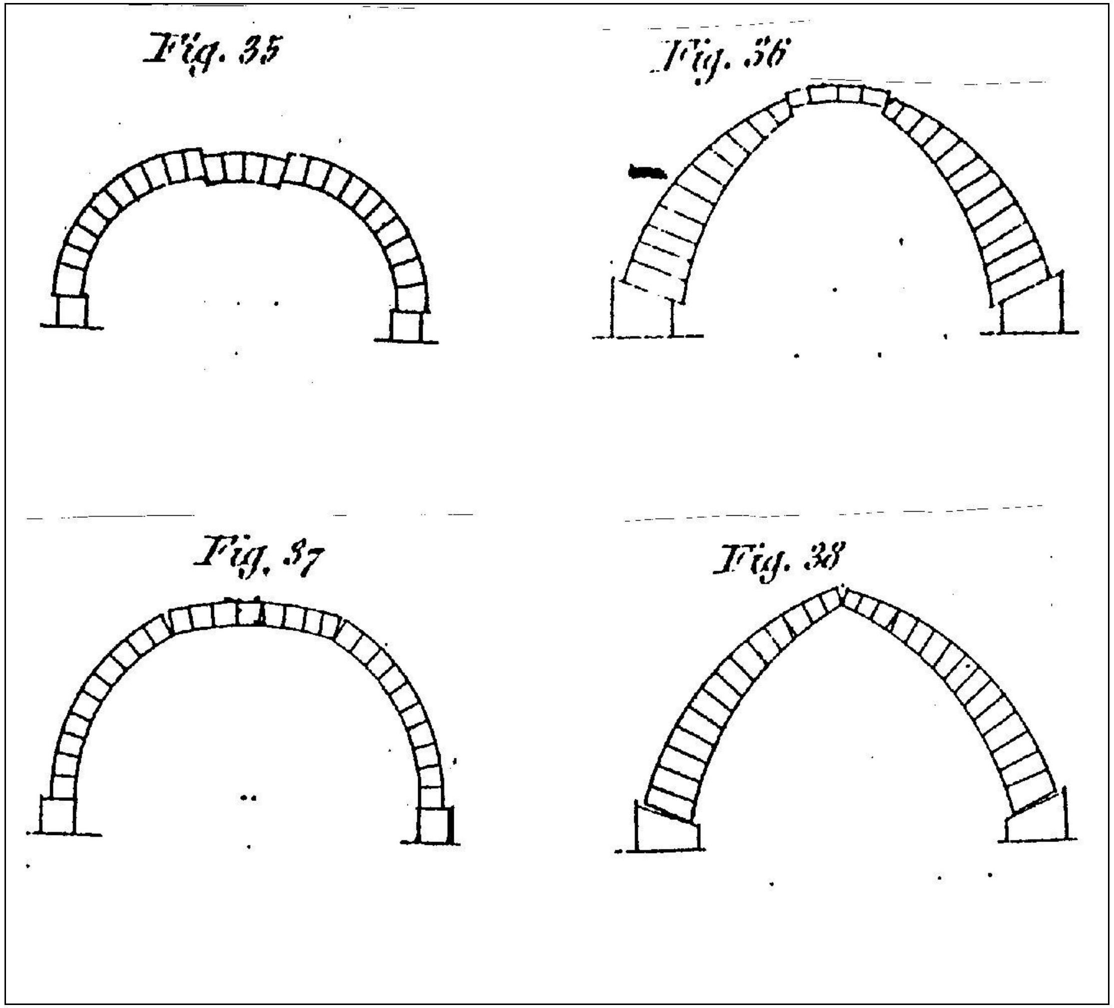
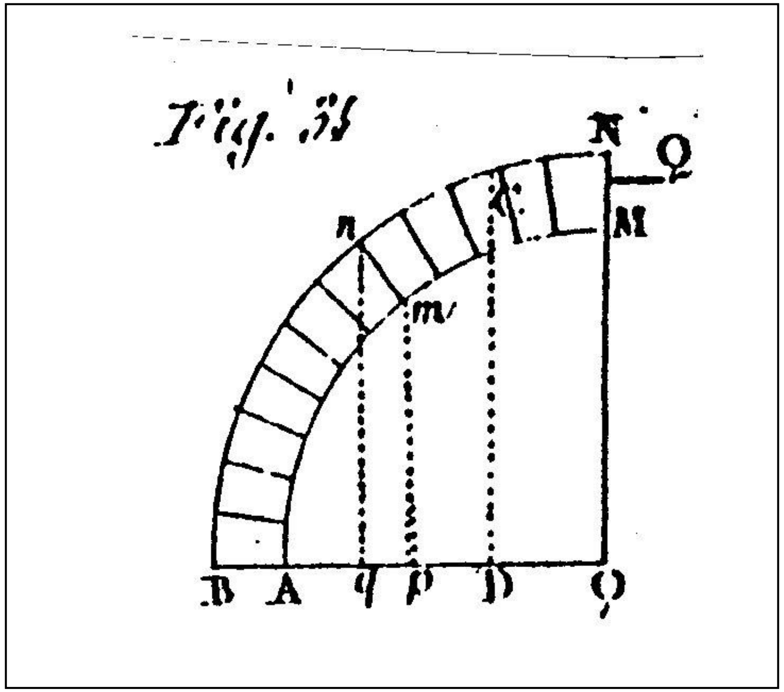


Fig. 6





21



22

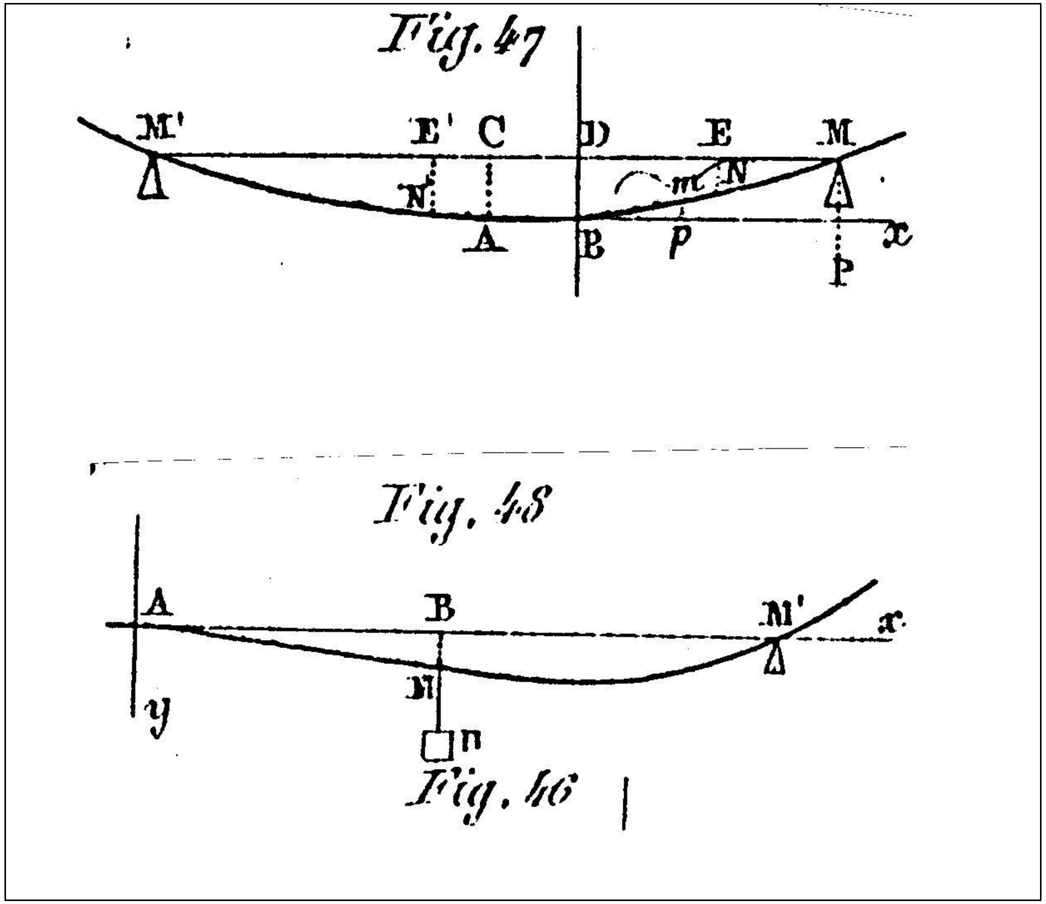


Fig. 47
M'
E'
C
D
E
M
N
m
A
B
p
x
P
Fig. 48
A
B
M'
x
y
Fig. 46

23

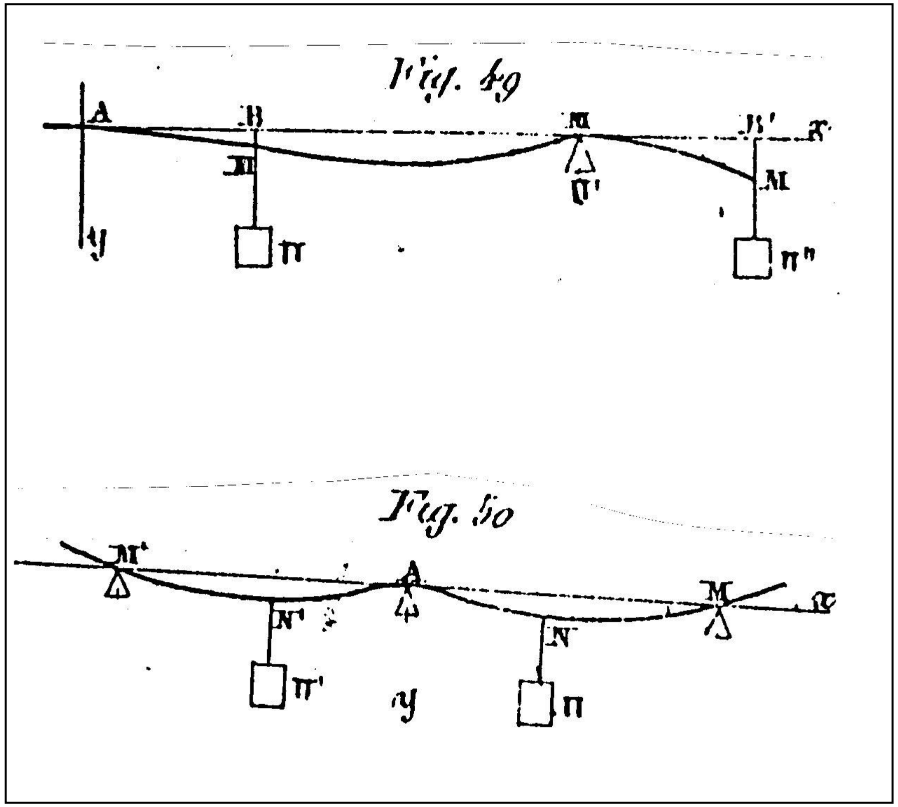


Fig. 49
A
B
B'
x
M
y
Fig. 50
M'
A
M
N'
N
x
y

24

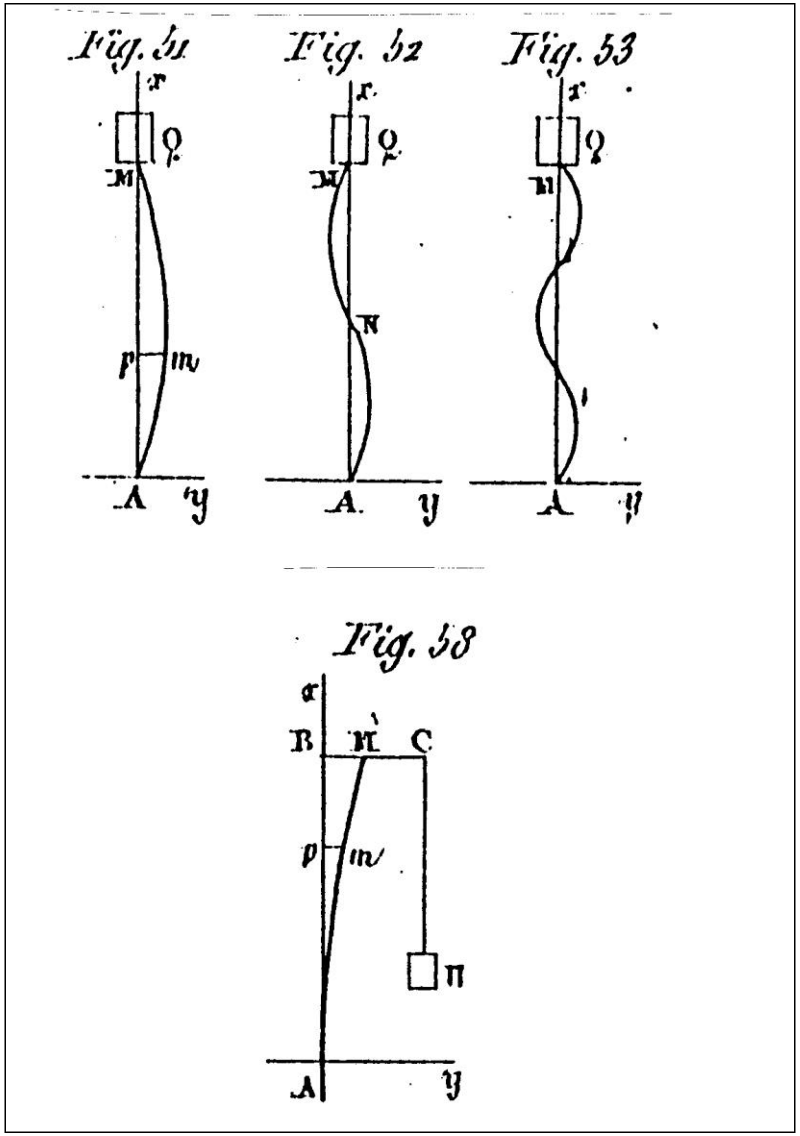


Fig. 51
Fig. 52
Fig. 53
x
Q
M
N
p
m
A
y
Fig. 58
B
C
Π

25

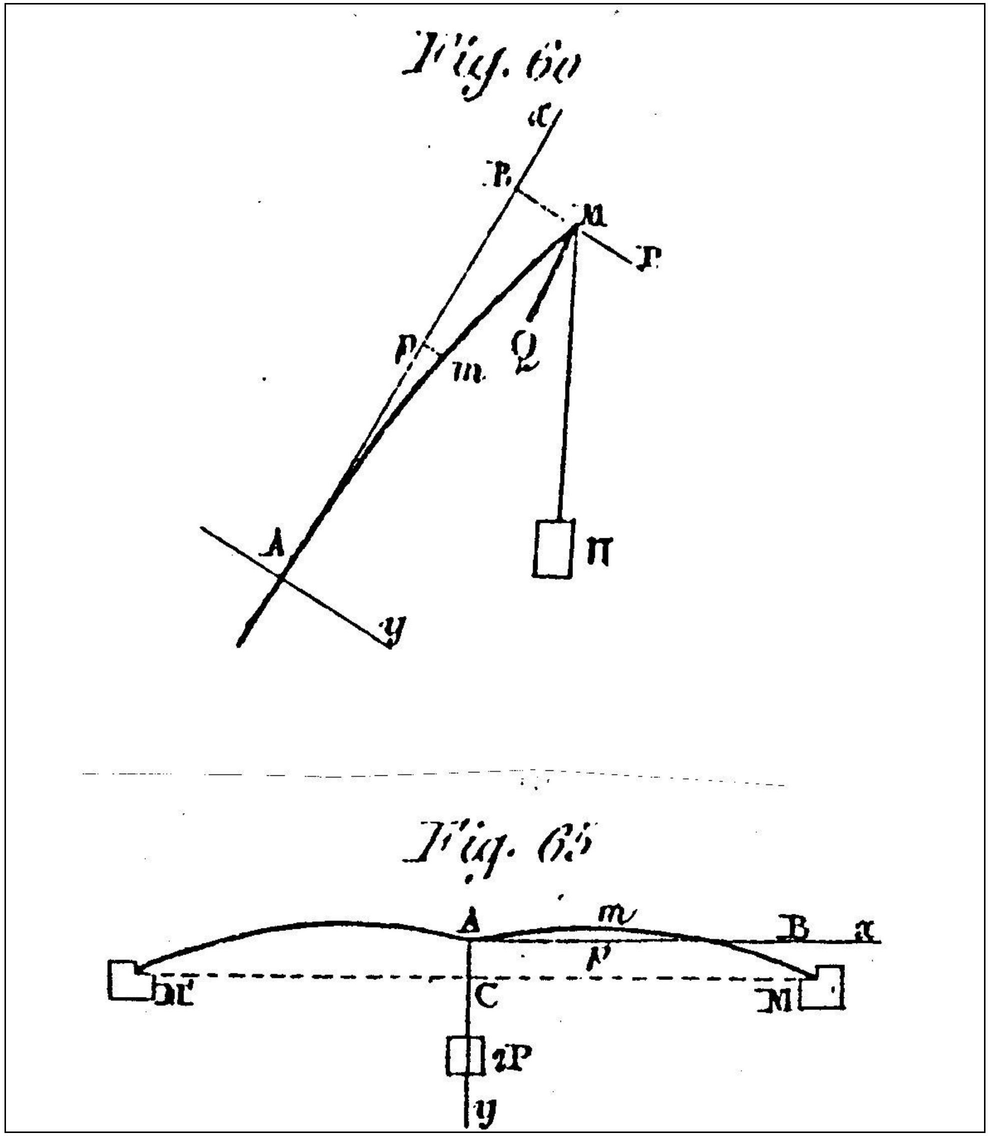


Fig. 60
x
P
M
Q
p
m
A
y
Π
Fig. 65
A
m
B
x
C
M
2P
y

26

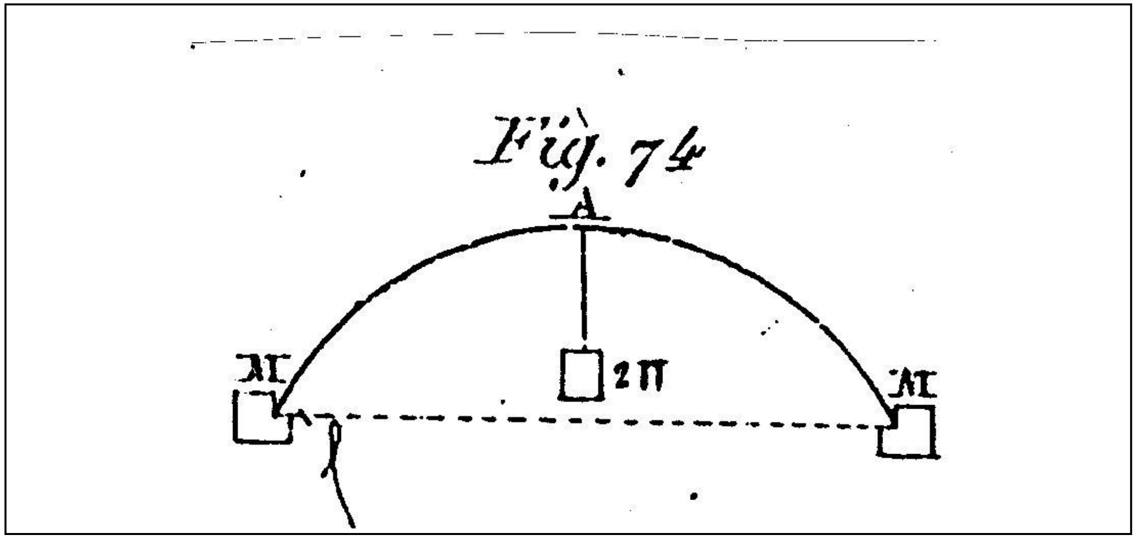


Fig. 74
A
M
2Π
M

27

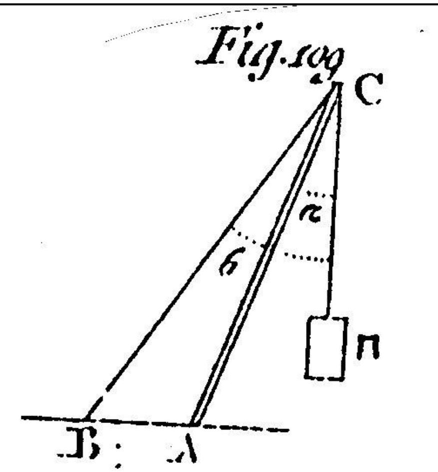


Fig.109
C
α
β
Π
B
A

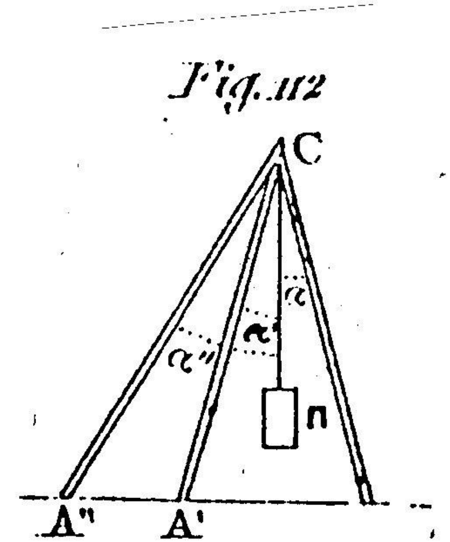


Fig.112
C
α
α'
α''
Π
A''
A'

28

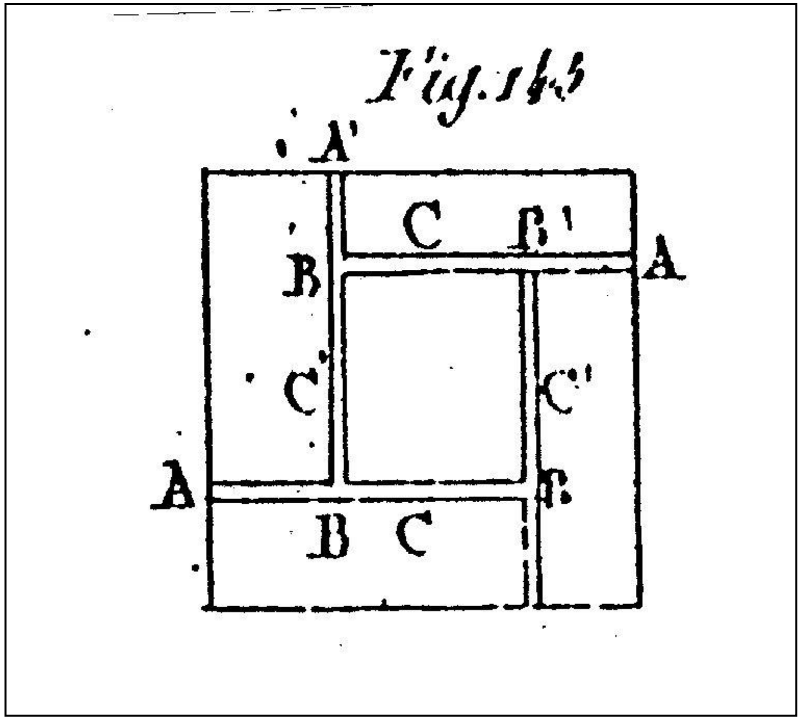


Fig.145
A'
C
B'
A
B
C'
C'
A
B
B
C

29