

INTORNO AI SISTEMI ELASTICI

DISSERTAZIONE

PRESENTATA DA

CASTIGLIANO ALBERTO

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

della R. Scuola d'applicazione degli Ingegneri

IN TORINO

per ottenere la Laurea di

INGEGNERE CIVILE

1 8 7 3

01

Il Socio Cav. Giovanni CURIONI presenta e legge alla Classe una Memoria del sig. Alberto CASTIGLIANO, Ingegnere delle Strade ferrate dell'Alta Italia, intitolata:

02

NUOVA TEORIA

INTORNO ALL'EQUILIBRIO

DEI SISTEMI ELASTICI

Se ad un corpo elastico qualunque si applicano delle forze tali, che si farebbero equilibrio quando il corpo fosse rigido, questo si deforma e si stabilisce in una nuova condizione d'equilibrio. Siccome in tale deformazione i punti d'applicazione delle forze esterne si spostano, queste fanno un lavoro.

03

Ma la deformazione del corpo fa nascere delle forze *interne od elastiche*, le quali fanno anch'esse un certo lavoro, perchè i loro punti d'applicazione si spostano. Dicesi comunemente che questo lavoro è uguale a quello delle forze esterne.

2. È noto e si vedrà poi in seguito che il lavoro di deformazione di un sistema elastico può esprimersi in funzione delle forze esterne.

Ciò posto, i due nuovi teoremi sono i seguenti:

1° *Se per un sistema elastico qualunque il lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze esterne si differenzia rispetto ad una di queste forze, la derivata, che si ottiene, esprime lo spostamento del punto d'applicazione della forza proiettato sulla sua direzione.*

2° *Se la medesima espressione del lavoro di deformazione si differenzia rispetto al momento di una coppia, la derivata, che si ottiene, esprime la rotazione della linea, che congiunge i punti d'applicazione delle due forze della coppia.*

Questi teoremi, la cui importanza è evidente, sono veri soltanto se le deformazioni sono piccolissime, per modo che le potenze degli spostamenti e delle rotazioni superiori alla prima siano trascurabili rispetto a questa.

Essi possono riunirsi in un solo, ch'io chiamerò *teorema delle derivate del lavoro di deformazione* o più brevemente *teorema delle derivate del lavoro*.

04

05

3. Si vedrà in seguito che esso basta per risolvere tutte le questioni, che si presentano nella pratica intorno all'equilibrio dei sistemi elastici. Si vedrà pure che esso contiene come applicazione o meglio come semplice osservazione il *teorema del minimo lavoro delle deformazioni elastiche* o *principio d'elasticità*, che il Generale MENABREA ha per primo enunciato in tutta la sua generalità nel 1857 e 1858 alle Accademie delle Scienze di Torino e Parigi, e intorno al quale ha presentato nel 1868 un'altra Memoria all'Accademia delle Scienze di Torino.

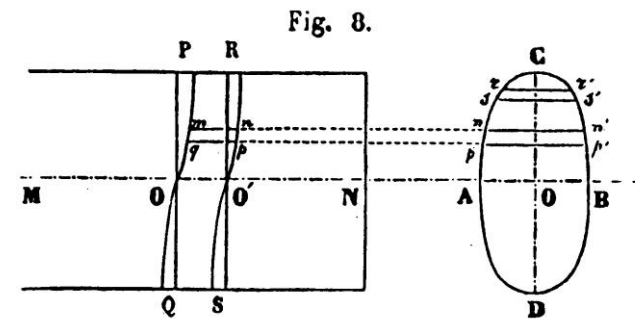
CAPITOLO III.

FORMOLE PIÙ IMPORTANTI DELLA RESISTENZA
DEI SOLIDI.

Ora i sistemi, che si hanno a studiare in pratica, sono presso che sempre composti di solidi lunghi e sottili, i cui assi rettilinei o curvilinei sono tutti contenuti in un medesimo piano: il quale di più taglia tutte le sezioni trasversali dei solidi componenti il sistema secondo uno dei loro assi principali d'inerzia, e contiene tutte le forze applicate al sistema.

Per tali sistemi non havvi mai torsione, quindi noi non avremo mai da occuparci in seguito di questa deformazione.

34. Sia MN l'asse d'un prisma o cilindro di grande lunghezza rispetto alle dimensioni della sua sezione trasversale (fig. 8); la quale abbia l'asse AB del massimo



momento d'inerzia assai piccolo rispetto all'altro asse principale d'inerzia CD . Supponiamo che a ciascuna molecola nelle basi siano applicate due forze; l'una normale alla base, l'altra parallela all'asse principale CD del minimo momento d'inerzia.

35. Flessione.

Ora chiamiamo T la somma di tutte le forze elementari parallele all'asse MN applicate a ciascuna base del prisma e M la somma dei momenti di tutte le forze applicate ad una base rispetto all'asse centrale del massimo momento d'inerzia della sezione RS .

Il momento M (che chiameremo d'or innanzi *momento di flessione*) per una sezione qualunque, può esprimersi in funzione del momento M_0 e della somma P di tutte le forze tangenti applicate in ciascuna base; poichè si ha

$$M = M_0 + Px \quad \dots\dots (21)$$

detto M_0 il valore di M per $x=0$

l'espressione sopra trovata del lavoro di deformazione dovuto alla flessione tra le due sezioni PQ , RS , diventa:

$$\frac{1}{2} \frac{T^2}{E\Omega} dx + \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \dots\dots (18^{bis})$$

36. Scorrimento trasversale. — Passiamo ora allo scorrimento delle fibre parallelamente all'asse MN .

lo scorrimento della faccia mn rispetto alla pq è dovuto alla differenza delle tensioni, che hanno luogo sulla parte nR della sezione RS , e sulla parte mP della sezione PQ .

Il lavoro totale dovuto allo scorrimento tra le due sezioni PQ RS' è dunque:

$$\frac{1}{2} \frac{AP^2}{E_t\Omega} dx \quad \dots\dots (26)$$

essendo A un coefficiente numerico variabile secondo la forma della sezione.

38. Espressione completa del lavoro. — Sommando quest'ultima formola colla (18 bis), si ottiene, per esprimere il lavoro di deformazione totale fatto tra le due sezioni PQ , RS la cui distanza è dx , la formola

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{E\Omega} + \frac{AP^2}{E_t\Omega} \right) dx \quad \dots\dots (27) .$$

Noi abbiamo trovato questa formola per un solido prismatico sollecitato soltanto da forze applicate alla sua base e distribuite con una certa legge. Ma dalle cose dette al num. 29 risulta che questa formola è ancora applicabile ad un solido le cui sezioni rette siano di grandezza lentamente variabile, ma sempre assai piccole rispetto alla sua lunghezza, il cui asse sia una curva, e che sia sollecitato da forze comunque distribuite tanto sulle basi quanto sulla sua superficie laterale. Solo che la formola ottenuta essendo particolare, bisognerà che *l'asse del solido sia una curva piana, il cui piano seghi tutte le sezioni secondo uno dei loro assi d'inerzia, e che tutte le forze applicate al solido siano contenute in questo piano.*

Per chiarezza chiameremo dunque ds l'elemento dell'asse del solido, ed allora, per esprimere il lavoro di deformazione tra due sezioni infinitamente vicine, le quali comprendono fra loro l'elemento ds dell'asse, avremo la formola:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{E\Omega} + \frac{AP^2}{E_t\Omega} \right) ds \quad \dots\dots (28) .$$

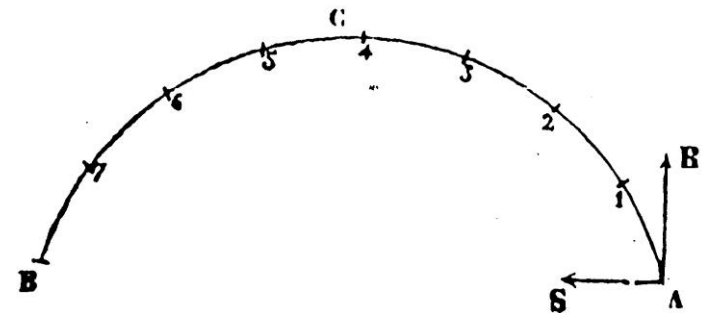
$$L = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M^2}{E \cdot I} + \frac{N^2}{E \cdot A} + \chi \cdot \frac{V^2}{G \cdot A} \right)$$

Ora il teorema delle derivate del lavoro si può applicare allo studio degli archi, qualunque sia la loro forma e la legge con cui sono caricati, facendo uso di un metodo d'approssimazione suscettibile di quel grado d'approssimazione, che si desidera; il quale non richiede che facilissimi calcoli aritmetici, e che nella pratica può essere assai utile, o almeno tale a me parve nella mia breve carriera.

Passiamo dunque ad esporre il metodo d'approssimazione sopra promesso per un arco il cui asse abbia qualunque forma, le cui sezioni variino con legge qualunque continua o discontinua, avendo però sempre piccola altezza rispetto alla lunghezza dell'asse, e che sia caricato in un modo qualunque.

67. Dividasi l'asse ACB del solido in un certo numero di parti uguali, p. es. in 8, e conducansi pei punti di divisione le sezioni normali all'asse (fig. 23).

Fig. 23.



Supponiamo che vi siano tre incognite da determinare, cioè una reazione verticale R , una spinta orizzontale S e un momento di flessione M_0 .

Si calcoleranno per ciascuna delle sezioni considerate $A, 1, 2, 3, \dots B$, sia il momento di flessione M , sia lo sforzo di compressione T , sia lo sforzo di taglio P . Questi calcoli si faranno con molta facilità, perchè tanto i bracci di leva delle forze, quanto le loro componenti si potranno misurare sopra un disegno fatto con diligenza, il che darà un'approssimazione più che sufficiente.

Si otterranno così per ciascuna delle sezioni considerate tre espressioni colle forme seguenti

$$M = a + bR + cS + eM_0$$

$$T = f + gR + hS$$

$$P = i + lR + mS,$$

$a, b, c, \dots l, m$, essendo numeri calcolati.

14

Allora per esprimere

il lavoro di deformazione di tutto l'arco potremo far uso della formola (28) eseguendo però l'integrazione col metodo approssimato di Bézout;

Vedesi dunque che si otterrà l'espressione di L con una semplice addizione, e quest'espressione sarà della forma seguente:

$$L = \frac{s}{2} \left(a + 2bR + 2cS + 2eM_0 + eR^2 + 2fRS + 2gRM_0 + hS^2 + 2iSM_0 + kM_0^2 \right),$$

$a, b, c, \dots$ essendo numeri, che risultano dalle operazioni precedenti.

15

Ottenuto il lavoro L in funzione delle incognite R, S, M_0 , se ne uguaglieranno a zero le derivate rispetto ad esse, con che si esprimerà che la sezione O non può nè spostarsi parallelamente a se stessa, nè ruotare, e si ottengono così le tre equazioni seguenti:

$$b + eR + fS + gM_0 = 0,$$

$$c + fR + hS + iM_0 = 0,$$

$$d + gR + iS + kM_0 = 0,$$

dalle quali si ricavano i valori delle incognite.

68. Si osservi che tutti questi calcoli non richiedono che semplici operazioni aritmetiche, cosicchè il metodo esposto può essere imparato materialmente e applicato con sicurezza anche da chi non abbia che scarse cognizioni matematiche, il che tutti sanno quanto sia utile in pratica.

16

NUOVA TEORIA

INTORNO ALL'EQUILIBRIO

DEI SISTEMI ELASTICI

CAPITOLO IV.

APPLICAZIONE AI SOLIDI ISOLATI AD ASSE RETTILINEO.

40. Considerazioni generali. — Io mi propongo di applicare in questo capitolo il teorema delle derivate del lavoro ai solidi isolati, sollecitati da forze date e soggetti a certe condizioni; per es., appoggiati o incastrati per le loro estremità, incastrati per un'estremità ed appoggiati per l'altra, ecc.; cioè io mi propongo di trovare sia le deformazioni, sia le reazioni incognite; talora però io non cercherò che queste ultime, perchè quando esse saranno conosciute, considerandole come forze esterne, si potranno facilmente trovare le deformazioni, come nelle prime questioni, che tratterò qui sotto.

Fig. 12.

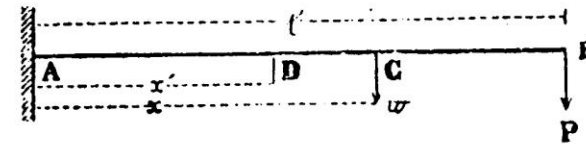


Fig. 14.

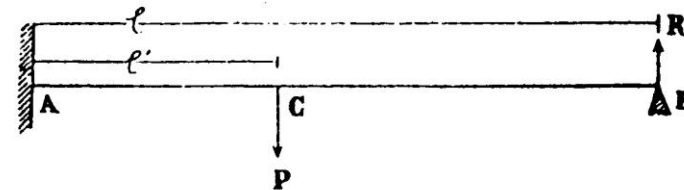
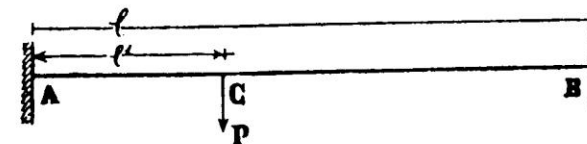
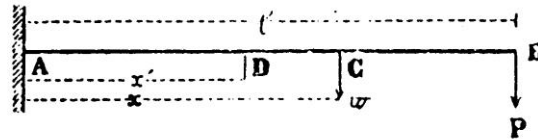


Fig. 13.



42. PROBLEMA 1° — Una trave AB , orizzontale, incastrata per l'estremo A è caricata all'altro estremo B d'un

Fig. 12.



peso P e su tutta la sua lunghezza d'un peso uniformemente distribuito in ragione di p Kgr., per ogni metro di lunghezza. Cercasi la curva che formerà l'asse del solido dopo la deformazione (fig. 12).

03

43. OSSERVAZIONE 1ª — L'introduzione della forza ausiliaria ϖ non è sempre necessaria: essa lo è soltanto per ottenere lo spostamento di quei punti nei quali o non è applicata alcuna forza esterna, o quelle applicate non sono indicate con una lettera particolare, che resti nel calcolo.

Per es.: per ottenere lo spostamento verticale del punto B , cioè la saetta f , non è necessario introdurre nel calcolo alcuna forza ausiliaria, perchè nel punto B è applicata la forza P , rappresentata con una lettera particolare. Difatti il lavoro di deformazione di tutto il solido è

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{EI} \int_0^l \left[P(l-x) + \frac{1}{2} p(l-x)^2 \right]^2 dx + \frac{1}{2} \frac{Al}{EI} \int_0^l \left[P + p(l-x) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{l^3}{EI} \left(\frac{1}{3} P^2 + \frac{1}{4} Ppl + \frac{1}{2} p^2 l^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{Al}{EI} \left(P^2 + Ppl + \frac{1}{3} p^2 l^2 \right). \end{aligned}$$

La saetta f si ottiene prendendo la derivata di quest'espressione rispetto a P ; il che ci dà:

$$f = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{P}{3} + \frac{pl}{8} \right) + \frac{Al}{EI} \left(P + \frac{pl}{2} \right),$$

cioè precisamente la formola (32).

Si ponga mente qui alla prontezza con cui abbiamo ottenuto questa formola.

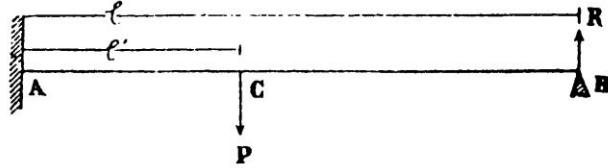
Se si trascura l'effetto dello scorrimento trasversale, il che, come abbiamo veduto, può generalmente farsi, si ottiene:

$$f = \frac{l^3}{EI} \left(\frac{P}{3} + \frac{pl}{8} \right) \quad \dots\dots (34),$$

che è la formola generalmente adoperata.

45. PROBLEMA 2° — Lo stesso solido del numero precedente essendo incastrato per l'estremo A , semplicemente appoggiato per l'altro estremo B , caricato d'un peso P alla distanza l' dal punto A e d'un peso uniformemente distribuito su tutta la lunghezza, cercansi le reazioni dell'incastro e dell'appoggio e l'abbassamento del punto d'applicazione del peso P .

Fig. 14.



06

46. Restringendoci dunque a tener conto della flessione sola, chiamando M_0 , M_1 i momenti di flessione rispetto ai punti C , A

I momenti M_0 , M_1 si esprimono in funzione di R per mezzo delle formole:

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= -R(l-l') + \frac{1}{2}p(l-l')^2 \\ M_1 &= -Rl + Pl' + \frac{1}{2}pl^2 \end{aligned} \right\} \dots (38),$$

dalle quali si trae

$$M_1(l-l') - M_0l = Pl'(l-l') + \frac{1}{2}pll'(l-l') \dots (39).$$

Per mezzo di quest'equazione e della prima delle (38) si può riguardare M_1 come funzione di M_0 e M_0 come funzione di R ; onde lo spostamento verticale del punto B è dato da

$$\left(\frac{dL}{dM_0} + \frac{dL}{dM_1} \frac{dM_1}{dM_0} \right) \frac{dM_0}{dR},$$

e poichè questo spostamento dev'essere nullo, ne segue l'equazione:

$$\frac{dL}{dM_0} + \frac{dL}{dM_1} \frac{dM_1}{dM_0} = 0.$$

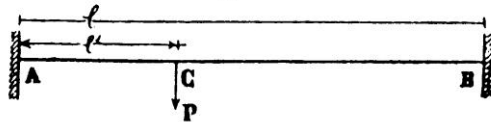
$$R = P \frac{l'^3(3l-l')}{2l^3} + \frac{3}{8}pl$$

07

49. PROBLEMA 3° — Una trave prismatica, orizzontale essendo incastrata per le sue estremità e caricata d'un peso uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza e d'un peso P applicato in un punto qualunque, cercansi le reazioni degli incastri

chiamiamo R, M la reazione verticale e il momento della coppia (cioè il momento di flessione)

Fig. 18.



equivalenti all'incastro B , e R_1, M_1 le quantità analoghe per l'incastro A .

08

Considerando il solido come ancora incastrato in A ma libero in B , si può esprimere il lavoro di deformazione del solido in funzione delle forze esterne e delle due reazioni incognite R, M : le derivate del lavoro rispetto a queste due quantità esprimono lo spostamento verticale del centro e la rotazione della sezione B ; e siccome ambedue queste deformazioni debbono essere nulle, bisognerà uguagliare a zero le dette derivate, onde si avranno due equazioni per determinare le due incognite.

09

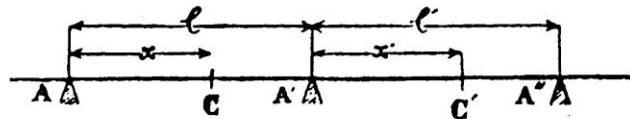
Ma si può anche riguardare la questione sotto un altro aspetto: difatti, si può considerare il solido come semplicemente appoggiato alle sue estremità, e rese libere di girare le sezioni A, B , purchè si applichino a queste due sezioni le due coppie M_1, M equivalenti agli incastri. In funzione di questi due momenti di flessione si può esprimere il lavoro di deformazione del solido, e le sue derivate rispetto ai detti momenti esprimono le rotazioni delle due sezioni A, B ; ma queste due rotazioni dovendo essere nulle, bisognerà uguagliare a zero quelle due derivate, onde si avranno due equazioni per determinare le due incognite.

10

52. PROBLEMA. — Una trave prismatica, orizzontale è sostenuta in più punti della sua lunghezza da sostegni rigidi, che terminano tutti alla medesima orizzontale: ogni tronco contenuto tra due appoggi successivi è caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza. Cercansi i momenti di flessione per le sezioni in corrispondenza degli appoggi, e le pressioni su questi punti (fig. 16).

Siano A, A', A'' tre appoggi successivi e M, M', M'' i

Fig. 16.



momenti di flessione per le sezioni corrispondenti: siano l, l' le lunghezze dei due tronchi $AA', A'A''$, e p, p' i pesi riferiti all'unità di lunghezza distribuiti uniformemente su di essi.

Per trovare questi momenti consideriamo il tronco AA' come una trave isolata appoggiata pe' suoi estremi, alle cui sezioni A, A' sono applicate due coppie i cui momenti sono M ed M' . Per esprimere la rotazione della sezione A' del tronco AA' sappiamo doverci prendere la derivata rispetto ad M' dell'espressione del lavoro di deformazione ossia di

$$\frac{l}{6EI} \left[M^2 + MM' + M'^2 - \frac{1}{4} p l^2 (M + M') + \frac{1}{40} p^2 l^4 \right];$$

il che ci dà:

$$\frac{l}{6EI} \left(M + 2M' - \frac{1}{4} p l^2 \right).$$

Parimente se si considera il tronco $A'A''$ come isolato ed appoggiato per le estremità, ma sollecitato sulle basi da due coppie i cui momenti siano M', M'' , trovasi che la rotazione della sezione A' di questo tronco è data da:

$$\frac{l'}{6EI} \left(2M' + M'' - \frac{1}{4} p l'^2 \right).$$

Ora le due coppie M' applicate alla base A' dei due tronchi tendono evidentemente a produrre rotazioni in senso contrario; e poichè d'altra parte le due sezioni A' coincidendo ruotano ambedue del medesimo angolo e nello stesso senso, ne segue che le due espressioni testè ottenute devono essere numericamente uguali, ma di segno contrario, onde si ha l'equazione:

$$Ml + 2 M' (l + l') + M'' l' - \frac{1}{4} (pl^3 + p'l'^3) = 0 \dots (53).$$

L'equazione (53) è quella data da CLAPEYRON, di cui forma il più bel titolo d'onore, e che ha fatto grandemente progredire la teoria dei ponti di ferro a travate continue.

THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE
DES
SYSTÈMES ÉLASTIQUES

ET SES APPLICATIONS

PAR

A. CASTIGLIANO

Ingénieur des chemins de fer de la Haute Italie



TURIN
AUGUSTE FRÉDÉRIC NEGRO
Éditeur.

STRADE FERRATE DELL'ALTA ITALIA

Servizio della Manutenzione e dei Lavori

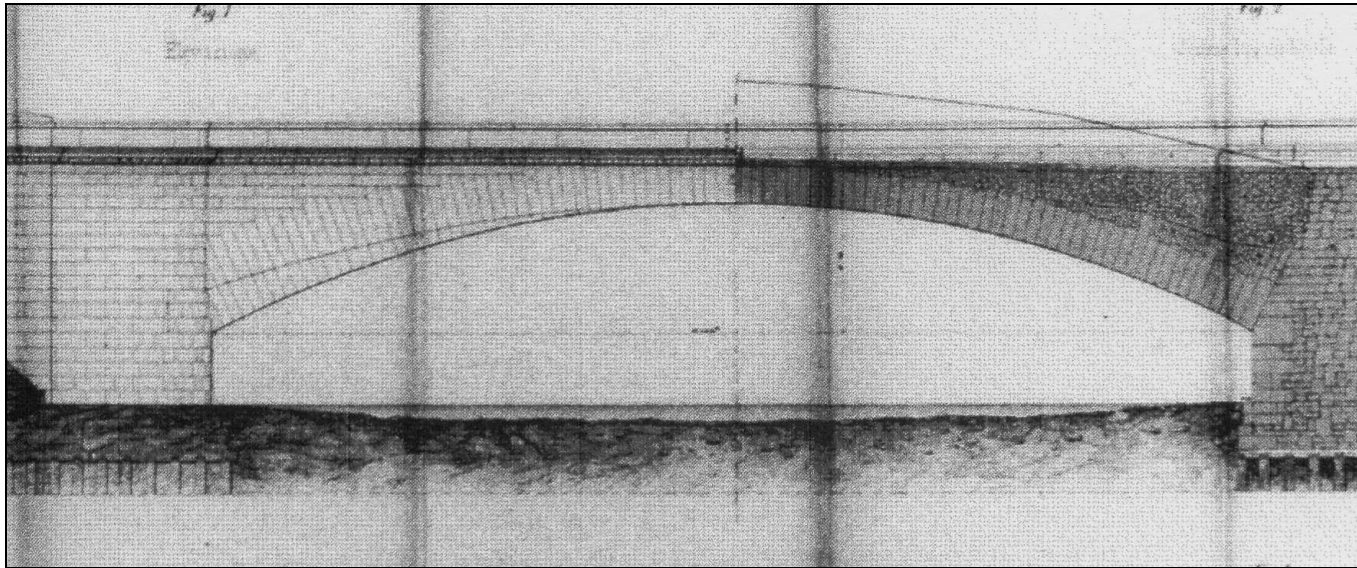
APPLICAZIONI PRATICHE DELLA TEORIA SUI SISTEMI ELASTICI

STUDI DELL'UFFICIO D'ARTE

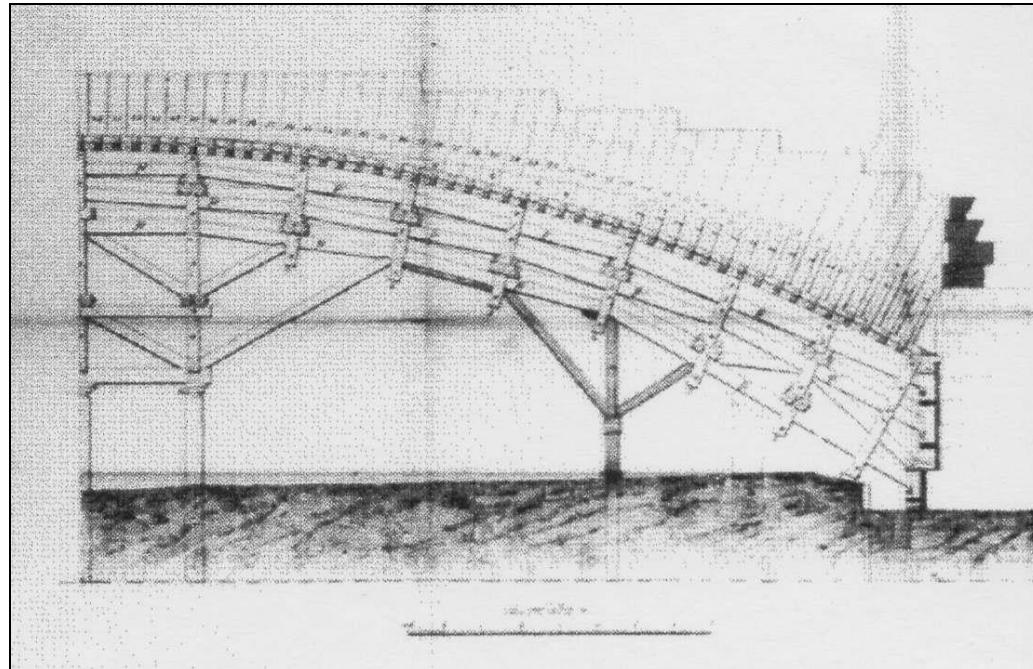
02

01

CASTIGLIANO PONTE MOSCA

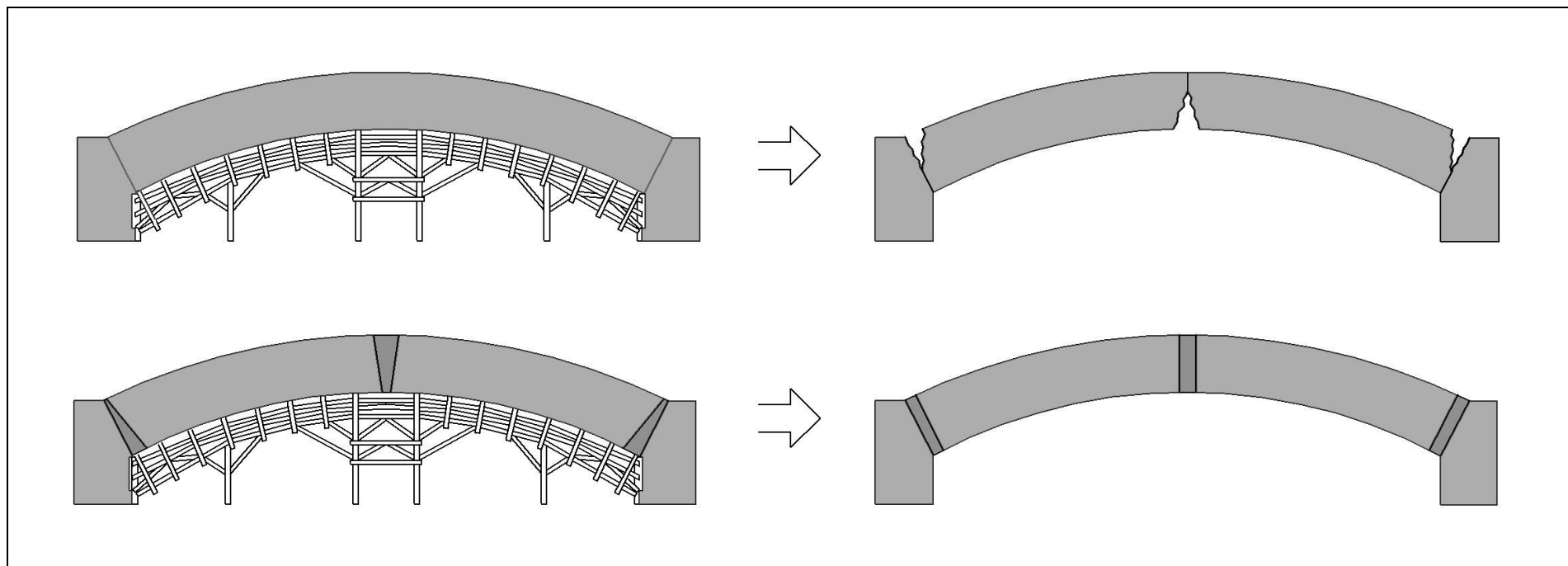


03



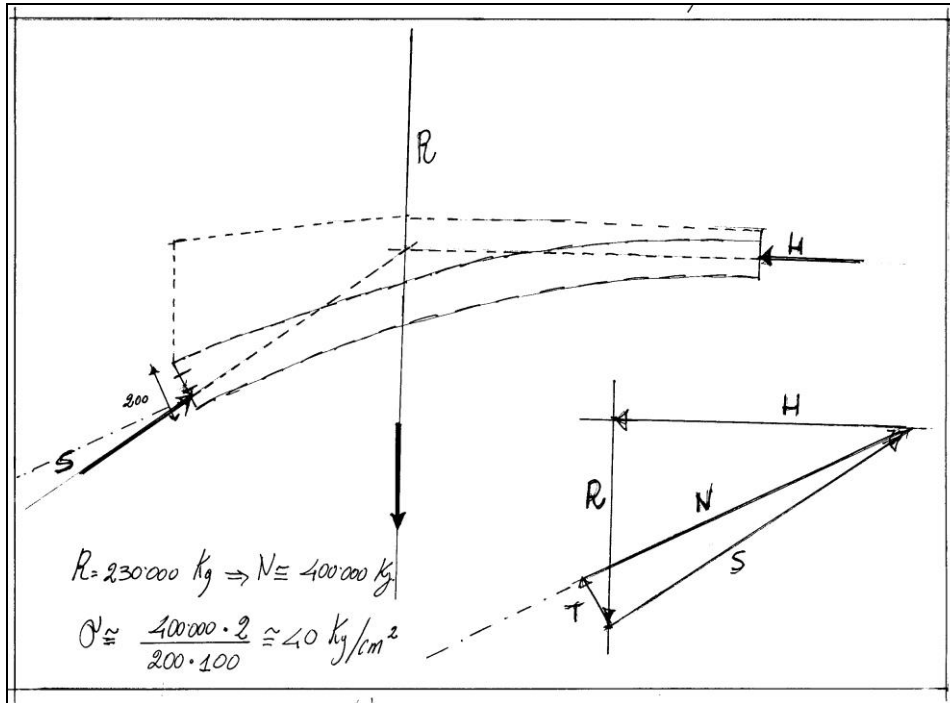
04

CASTIGLIANO PONTE MOSCA

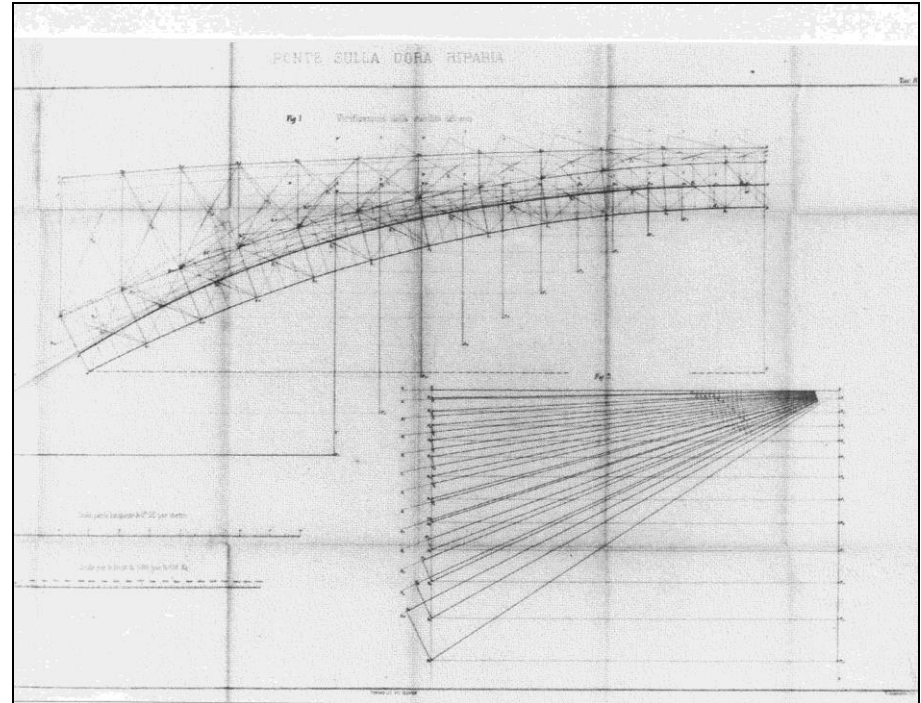


04 bis

CASTIGLIANO PONTE MOSCA

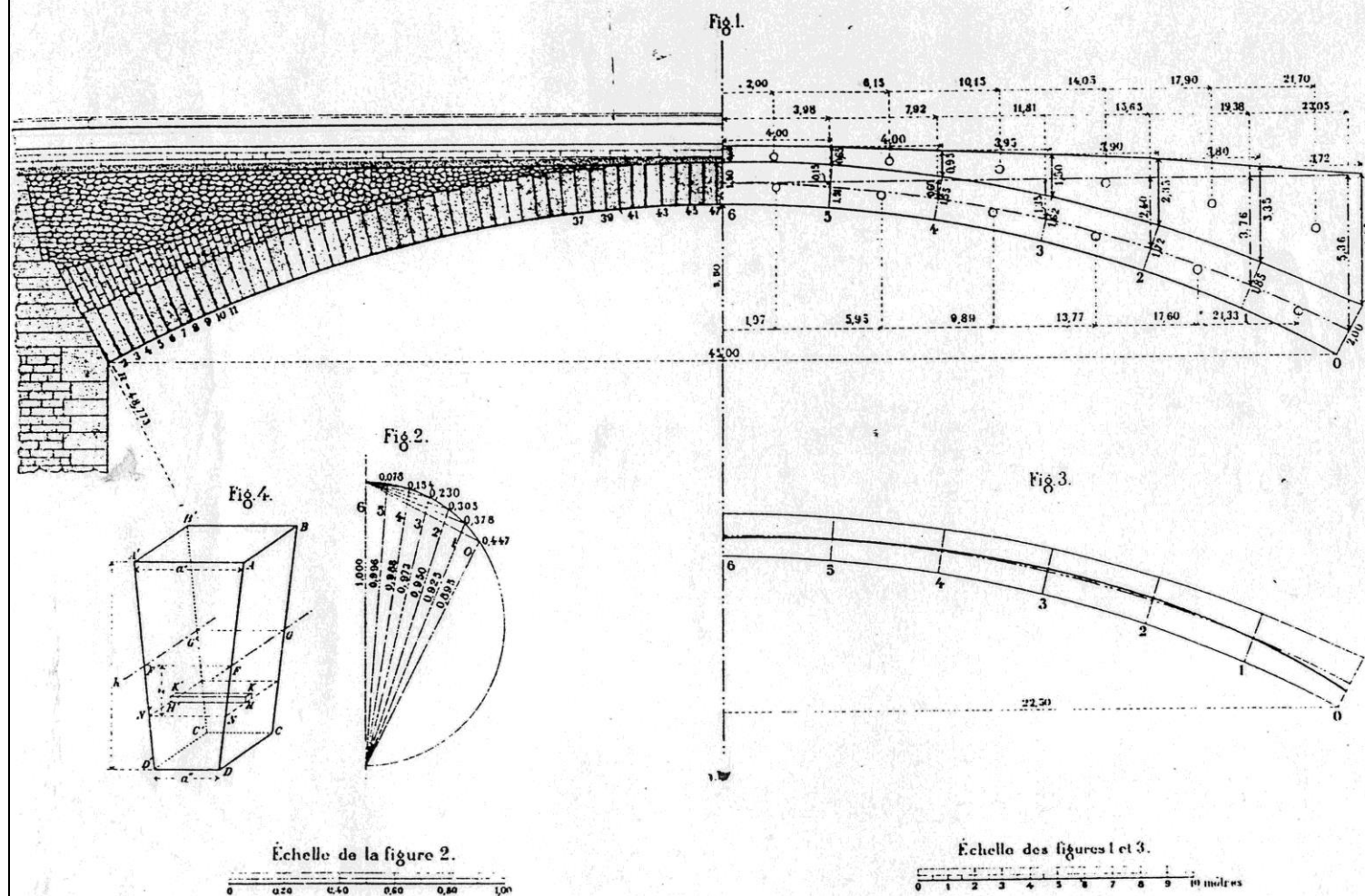


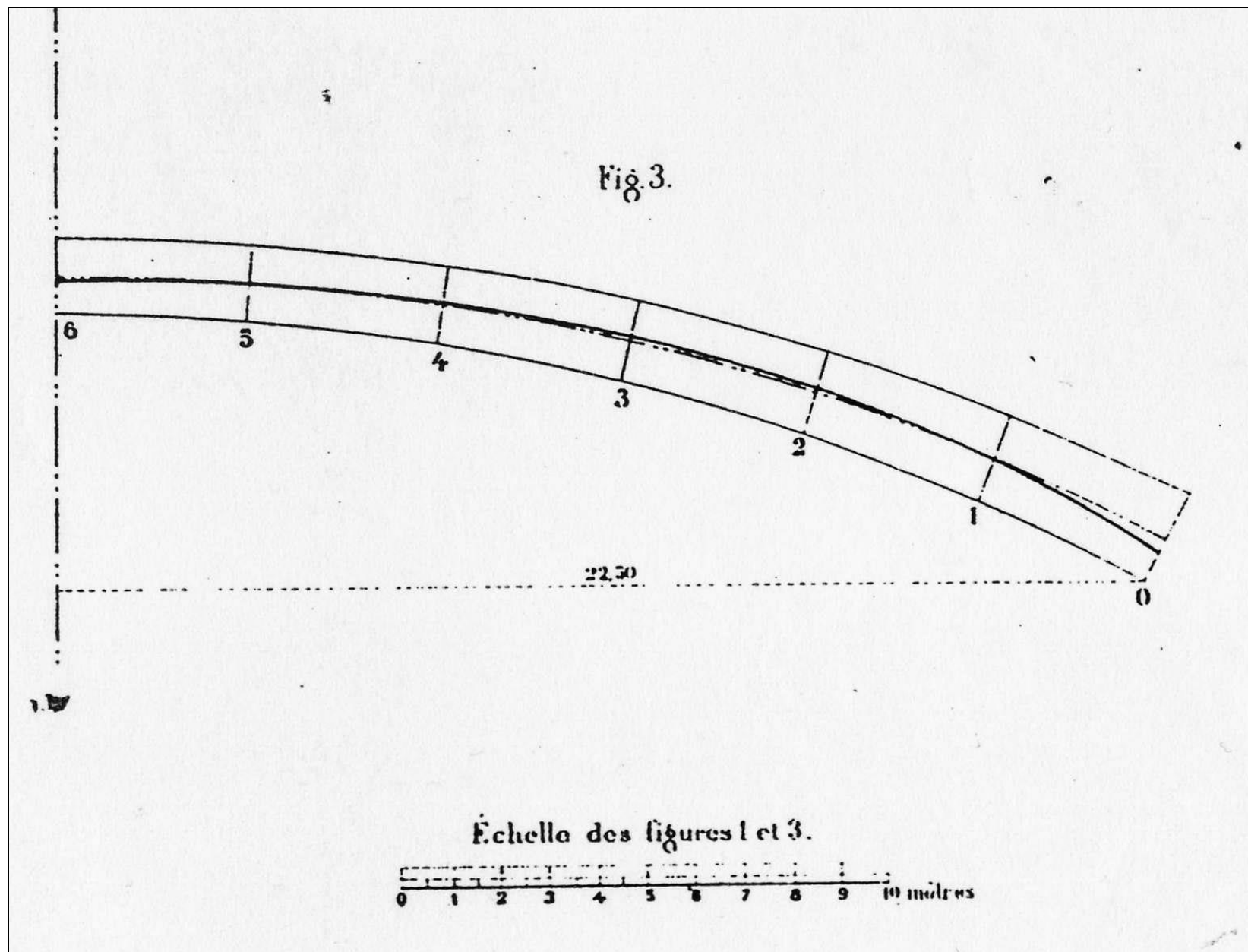
05



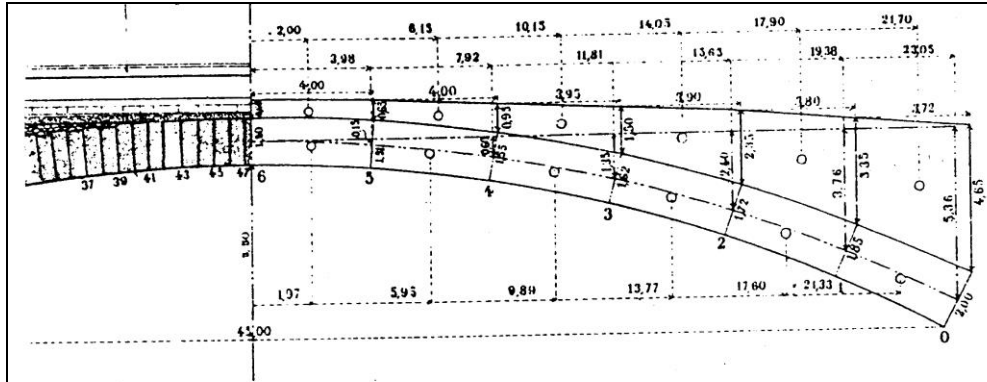
06

ÉTUDE DU PONT EN PIERRE DE TAILLE
construit sur la Doire à Turin, par l'ingénieur Charles Mosca.





CASTIGLIANO PONTE MOSCA



Per semplicità di calcolo si riducono qui in peso di muratura della vòlta tanto il rinfiaccio e la cappa quanto il riempimento e la massicciata stradale:

Si potrà così descrivere sopra l'estradosso una linea tale che, un riempimento compreso fra essa e l'estradosso ed avente lo stesso peso specifico della vòlta farebbe lo stesso effetto del vero carico permanente.

Pel sopracarico si prende un peso di Kgr. 600 per metro quadrato

Il sopracarico supposto equivale ad uno strato di muratura in pietra da taglio dell'altezza di metri $\frac{600}{2750} = 0,218$: si descriverà dunque al disopra della linea sopra detta che rappresenta il carico permanente ridotto in muratura di pietra da taglio, un'altra linea ad essa parallela e più alta di metri 0,218, e si otterrà così la linea limite del carico totale del ponte.

Se ora si prende per unità di peso il peso di un metro cubo di muratura della vòlta, ossia Kgr. 2750, è chiaro che il peso di un tronco qualunque di questa e del suo carico sarà espresso in numeri dall'area corrispondente.

per es. pel tronco 6, 3 il momento dato è quello del detto tronco rispetto al centro della sezione 3.

I pesi ed i momenti registrati nelle colonne 8 e 9 sono ottenuti da quelli delle colonne 6 e 7 moltiplicandoli per 2750.

Tronchi	Vòlta sola		Carico		Vòlta e carico		Vòlta e carico in chilogrammi	
	Area	Momenti	Area	Momenti	Area	Momenti	Area	Momenti
6.0	30,400	422,70	43,756	312,55	83,156	735,25	228079	2021037
6.1	31,816	292,89	28,876	186,49	60,692	479,38	166903	1318295
6.2	24,783	187,93	18,046	103,15	42,829	291,08	117780	800470
6.3	18,203	105,67	10,539	50,67	28,739	156,34	79032	429935
6.4	11,958	47,16	5,700	20,46	17,658	67,62	48559	185955
6.5	5,930	11,92	2,500	4,95	8,430	16,37	23182	46392

Un arco di muratura deve sempre essere riguardato come incastrato alle estremità, giacchè è chiaro che se esso è posto in buone condizioni di resistenza, come si deve sempre supporre in un primo calcolo, deve premere sulle spalle con tutta l'ampiezza delle sue faccie di posa, ossia delle imposte. Se poi a calcolo finito risulterà che, supponendo l'incastrato, vi sarebbe tensione in qualche punto dei giunti d'imposta, e se tale tensione non può aver luogo o per mancanza di cemento, o perchè non si possa contare sulla resistenza del cemento alla tensione, bisognerà riprendere il calcolo supponendo ridotte le altezze dei giunti a quelle sole parti che dal primo calcolo son risultate premute. Queste altezze si potranno ancora correggere in un terzo calcolo e così di seguito.

Perciò qui si comincerà ad esaminare la vòlta del ponte Mosca, supponendola incastrata nelle spalle, e caricata completamente, cosicchè pei tronchi 6, 0; 6, 1; 6, 2; . . . si abbiano i pesi ed i momenti dati nelle due ultime colonne della tabella riportata alla fine del numero precedente.

Il carico essendo simmetrico rispetto alla chiave, lo sforzo di taglio in questa sezione sarà nullo; quindi per incognite del problema si prenderanno le due seguenti:

M = momento di flessione alla chiave;

P = pressione normale id.

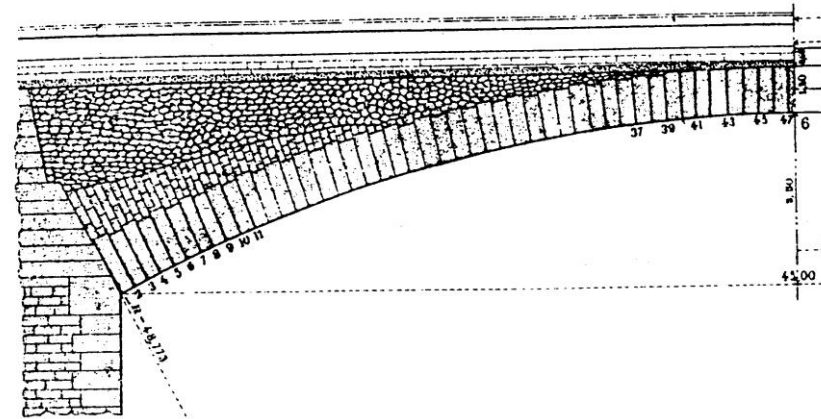
in funzione delle quali è facile esprimere il momento di flessione, la pressione normale e lo sforzo di taglio per una sezione qualunque.

Sezioni	Momenti di flessione	Pressioni normali	Sforzi di taglio
0	$M_0 = M - 5,36 \cdot Q + 2021937$	$P_0 = 0,895 \cdot Q + 102217$	$S_0 = 0,447 Q - 204655$
1	$M_1 = M - 3,76 \cdot Q + 1318295$	$P_1 = 0,925 \cdot Q + 63085$	$S_1 = 0,378 Q - 154385$
2	$M_2 = M - 2,40 \cdot Q + 800470$	$P_2 = 0,950 \cdot Q + 35915$	$S_2 = 0,305 Q - 111897$
3	$M_3 = M - 1,35 \cdot Q + 429935$	$P_3 = 0,973 \cdot Q + 18177$	$S_3 = 0,230 Q - 76890$
4	$M_4 = M - 0,60 \cdot Q + 185955$	$P_4 = 0,988 \cdot Q + 7480$	$S_4 = 0,154 Q - 47987$
5	$M_5 = M - 0,15 \cdot Q + 46392$	$P_5 = 0,996 \cdot Q + 1815$	$S_5 = 0,078 Q - 22962$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1,000 \cdot Q$	$S_6 = 0$

È dunque necessario premettere la descrizione della vòlta.^(*)

Ora, questa è composta di 93 ordini di conci di granito i quali furono tutti esattamente tagliati in modo che per comporre con essi la volta secondo l'intradosso di metri 45,00 di corda e metri 5,50 di saetta non fosse punto necessaria l'interposizione della malta. Invece l'armatura della vòlta fu costruita secondo un arco di circolo colla saetta di metri 5,75, il cui sviluppo perciò superava di 0^m,162 quello dell'intradosso di progetto.

Per guadagnare questa differenza si disposero i conci *presso le imposte* in modo che presentassero delle commessure cuneiformi larghe all'intradosso e strettissime all'estradosso, le quali si riempirono di malta. Di queste commessure era maggiore la prima all'imposta, e diminuivano le altre gradatamente in modo da ridursi a zero dopo l'undecima,



Dal giunto 11 sino al 36 non si ha malta tra i conci.

A motivo però della disposizione data ai conci presso le imposte, l'angolo che il giunto 36 faceva col piano verticale condotto per la chiave era alquanto maggiore della somma degli angoli dei conci, che dovevano porsi in opera dal giunto 36 sino alla chiave, perciò si distribuì la differenza su tutti i giunti dal 36 al 47, disponendo i conci in modo che si toccassero all'intradosso, ma non all'estradosso, e riempiendo di malta i giunti. Così verso la chiave i giunti erano anch'essi cuneiformi, come alle imposte ma volti in senso contrario.

Tutta questa particolare disposizione dei conci e dei giunti venne immaginata e adottata dall'ingegnere costruttore per ottenere una buona distribuzione delle pressioni. Quanto fossero giustificate le sue previsioni risulta dal calcolo seguente, nel quale si supporrà per semplificare che tutti i giunti siano fatti senza interposizione di malta, salvo i due d'imposta ove si supporranno riuniti gli strati di malta dei primi undici giunti, e un giunto alla chiave ove si supporranno riuniti gli strati di malta di tutti i giunti dal 37 di destra al 37 di sinistra.

Premesse queste cose si chiamino:

E, E' i coefficienti di compressibilità della pietra di cui son fatti i conci e della malta formante i giunti;

$h_0, h_1, h_2, \dots, h_6$ le altezze delle sezioni 0, 1, 2, ... 6;

$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_6$ le aree delle medesime sezioni, le quali sono numericamente uguali alle loro altezze, essendo la larghezza uguale ad 1 metro;

$I_0 = \frac{1}{12} h_0^3, I_1 = \frac{1}{12} h_1^3, \dots, I_6 = \frac{1}{12} h_6^3$ i momenti d'inerzia delle dette sezioni.

Se l'arco fosse tutto di granito, cioè se i tre giunti teorici alle imposte e alla chiave invece di essere riempiti con cunei di malta lo fossero con cunei anch'essi di granito, il lavoro di deformazione di tutta la volta, trascurando la parte dovuta allo scorrimento trasversale, sarebbe data dalla formola:

$$2 \times \frac{4,00}{2E} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{M_0^2}{I_0} + 4 \frac{M_1^2}{I_1} + 2 \frac{M_2^2}{I_2} + \dots + \frac{M_6^2}{I_6} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{P_0^2}{\Omega_0} + \frac{P_1^2}{\Omega_1} + \frac{P_2^2}{\Omega_2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{P_6^2}{\Omega_6} \right) \right\} \quad (1)$$

Ma per avere il vero lavoro di deformazione della volta bisogna sottrarre da questa formola il lavoro di deformazione dei tre cunei di granito che mancano nei tre giunti, ed aggiungere quello dei tre cunei di cemento che ne tengono il posto.

...

quindi la formola da aggiungersi alla (1) per avere l'espressione completa del lavoro di deformazione della volta sarà:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) \left\{ 0,0923 \left(\frac{P_0^2}{\Omega_0} + \frac{M_0^2}{I_0} + 1,547 \frac{M_0 P_0}{h_0 \Omega_0} \right) + 0,045 \left(\frac{P_6^2}{\Omega_6} + \frac{M_6^2}{I_6} - 4 \frac{P_6 M_6}{h_6 \Omega_6} \right) \right\} \quad (2)$$

è necessario conoscere i valori dei coefficienti E , E' od almeno il loro rapporto. Ora, nessuna esperienza attendibile si ha sulla compressibilità del granito e delle malte: siccome però le malte quando sono fresche, come appunto avveniva al ponte Mosca, devono essere molto compressibili, mentre invece il granito è sicuramente pochissimo compressibile, si supporrà qui che la compressibilità della malta adoperata nei giunti del ponte Mosca, fosse, all'epoca del disarmo e della successiva costruzione dei rinfranchi, cento volte maggiore di quella del granito, cioè supporremo:

$$\frac{E'}{E} = 100.$$

si ottiene, per esprimere il lavoro

$$2 \times \frac{4,00}{2E} (20,03 \cdot M^2 - 32,46 \cdot 2MQ + 118,00 \cdot Q^2 + 11305728 \cdot 2M - 41398510 \cdot 2Q)$$

Ora le condizioni geometriche a cui la volta deve soddisfare nel deformarsi sono le due seguenti:

1.^a La sezione alla chiave deve restare verticale anche dopo la deformazione, e perciò la sua rotazione dev'essere nulla.

2.^a La stessa sezione deve discendere verticalmente, cioè il suo spostamento orizzontale dev'essere nullo.

I valori di M e Q che soddisfanno a queste due condizioni sono quelli che rendono nulle le derivate dal lavoro di deformazione della volta rispetto ad M e Q . Si hanno dunque le due equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} 20,03 \cdot M - 32,46 \cdot Q + 11305728 &= 0 \\ -32,46 \cdot M + 118,00 \cdot Q - 41398510 &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali si ricava:

$$\begin{aligned} Q &= 352990 \\ M &= 7690. \end{aligned}$$

5.^a Curva delle pressioni e massimi sforzi per metro quadrato.

Se nella tabella del N.^o 3 si sostituiscono ad M e Q i loro valori testè trovati, si ottengono per i momenti di flessione, le pressioni normali e gli sforzi di taglio nelle sezioni 0, 1, 2, ... del ponte i valori scritti nelle colonne 2.^a, 3.^a e 4.^a della tabella qui sotto riportata. Dividendo i momenti di flessione per le pressioni normali corrispondenti, si ottengono i numeri della 5.^a colonna, i quali danno le distanze dei centri di pressione dei centri delle sezioni.

Per mezzo della formula:

$$\frac{P}{\Omega} \pm \frac{Mv}{I}$$

nella quale P ed M rappresentano la pressione normale e il momento di flessione in una sezione, e Ω , I , v l'area, il momento d'inerzia e la semi-altezza della medesima, si ottengono le pressioni per metro quadrato all'intradosso e all'estradosso nelle sezioni considerate. Tutti questi risultati sono raccolti nella seguente tabella:

Sezioni	Momenti di flessione	Pressioni normali	Sforzi di taglio	Curva delle pressioni	Pressioni per m. q. all'intradosso	Pressioni per m. q. all'estradosso
1	2	3	4	5	6	7
0	+137627	418137	-46865	+0,329	412425	3635
1	-1315	389595	-20955	-0,003	212905	208305
2	-38990	371245	-4237	-0,105	294915	136765
3	-38895	361627	+4296	-0,108	312155	134305
4	-18145	356230	+6372	-0,051	275146	184514
5	+1135	353385	+4571	+0,003	237011	231045
6	+7690	352990	0	+0,022	255997	214993

Vedesi che la distanza dei centri di pressione dai centri delle sezioni è dappertutto minore della sesta parte dell'altezza delle sezioni corrispondenti, cioè la curva delle pressioni è tutta contenuta nel terzo medio della volta: d'onde segue che in nessun punto tende a prodursi tensione, ma che si ha invece pressione in tutta l'estensione della volta.

La pressione massima ha luogo all'intradosso delle sezioni d'imposta ed è di Kgr. 412 425 per metro quadrato, ossia di Kgr. 41,24 per centimetro quadrato.

Questa pressione non è certo troppo grande pel granito impiegato nella costruzione del ponte Mosca, ma essa sarebbe enorme per le malte, alcune delle quali cominciano a schiacciarsi sotto una pressione anche minore di 40 Kgr. per centimetro quadrato.

Tuttavia bisogna qui fare una osservazione importante.

Se il disarmo di una vòlta ha luogo dopo che le malte hanno fatto buona presa, esse possono benissimo schiacciarsi sotto la pressione massima sopra determinata, e uscire a poco a poco dai giunti compromettendo così la stabilità della vòlta.

Ma se il disarmo ha luogo prima che le malte abbiano fatto buona presa, esse si comprimono bensì maggiormente, ma i grani di sabbia, che le compongono, non possono cadere, perchè tenuti insieme dalla calce non ancora indurita. In questo caso la presa delle malte si fa sotto la pressione stessa che esse devono poscia sopportare, ed è quindi evidente che dopo la presa lo schiacciamento non può più aver luogo.

6.° Studio della distribuzione delle forze interne nella vòlta, nel caso che in nessuno dei giunti si fosse interposta della malta.

In questo caso il lavoro di deformazione della vòlta è espresso dalla formola (1) del N.° 4,

Uguagliando a zero le derivate di quest'ultima rispetto ad M e Q ,

si trae:

$$\begin{aligned} M &= -21\,800, \\ Q &= 324\,710. \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella tabella data alla fine del N.° 3 si vede facilmente che la curva delle pressioni passa nel terzo medio per tutta l'estensione della vòlta salvo per un tronco della lunghezza di circa metri 2,80 presso ciascuna imposta. In questo tronco la curva delle pressioni passa al disotto dell'asse della vòlta, onde segue che questa si apre verso l'estradosso, come era facile prevedere attesa la sua piccola monta.

Si potrebbe ora procedere ad un terzo calcolo di approssimazione prendendo 1^m, 37 per altezza della sezione all'imposta. Ma per la pratica basterà generalmente la seconda approssimazione e si può ritenere con sufficiente esattezza che la parte premuta della sezione all'imposta sarà di 1^m, 37, e che quindi nel disarmo della vòlta considerata questa si aprirà per un'altezza di metri 2,01 — 1,37 = 0,64 a partire dall'estradosso.

20

In quanto al valore totale della pressione normale all'imposta essa si può riguardare come uguale a quella ottenuta nella seconda approssimazione, e siccome ora la curva delle pressioni all'imposta passa al limite del terzo medio per la sezione effettivamente premuta, cosicchè la pressione massima per metro quadrato è doppia della pressione media, ne segue che la detta pressione massima sarà di Kgr.

$$\frac{403832}{1,928} \times 2 = 608200$$

ossia di Kilogr. 60,82 per centimetro quadrato.

21

Conclusione.

Siccome tale pressione non sarebbe eccessiva pel granito del Malanaggio impiegato nella costruzione della vòlta, vedesi che questa avrebbe potuto essere costrutta con sufficiente solidità anche senza ricorrere alle disposizioni speciali immaginate dal celebre costruttore Ingegnere Carlo Mosca. Però dal confronto dei risultati ottenuti appare manifesto quanto siano state utili tali disposizioni per la stabilità del ponte, giacchè esse hanno ridotto a Kgr. 41,24 per centimetro quadrato la massima pressione, la quale altrimenti sarebbe riuscita di Kgr. 60,82.