STRADE FERRATE DELL'ALTA ITALIA

Servizio della Manutenzione e dei Lavori

APPLICAZIONI PRATICHE DELLA TEORIA SUI SISTEMI ELASTICI

STUDI DELL'UFFICIO D'ARTE

16804

PONTE SULLA DORA A TORINO

(Tavola 10.ª)

1.° Dati generali.

Corda dell'intradosso	metri	= 45,00
Saetta id.	»	= 5,50
Raggio id.	»	= 48,773
Ampiezza dell'arco d'intradosso		= 54° 56′ 42″
Altezza dell'arco alla chiave	metri	= 1,50
id. alle imposte	»	= 2,00
Corda dell'estradosso	»	= 46,846
Saetta id.	»	= 5,226
Raggio id.	»	= 55,102
Ampiezza id.		= 50° 18′ 42″
Larghezza del ponte compresi i parapetti	metri	= 12, 60

2.° Carichi.

Come ordinariamente si fa nell'esaminare la stabilità dei ponti di muratura, si considererà qui una larghezza di ponte di un metro, benchè ciò non rechi alcuna semplificazione o alcun vantaggio nel calcolo, e non sia punto necessario.

La volta del ponte è di granito del Malanaggio presso Pinerolo, il cui peso è di Kgr. 2750 al metro cubo. I rinfianchi son fatti di muratura di pietrame il cui peso è di Kgr. 2300 al metro cubo: sui rinfianchi è stesa una cappa di smalto dello spessore di $0^m,15$, sulla quale si è fatto un riempimento di terra battuta a strati il cui peso è di Kgr. 1600 al metro cubo. Su questo riempimento si ha la massicciata stradale il cui peso è di Kgr. 1800 al metro cubo.

Per semplicità di calcolo si riducono qui in peso di muratura della vôlta tanto il rinfianco e la cappa quanto il riempimento e la massicciata stradale: perciò le altezze verticali del riempimento e della cappa, si ridurranno nel rapporto di 2750 a 2300 (rapporto dei pesi unitari delle due murature), ossia si moltiplicheranno pel rapporto $\frac{2300}{2750}$; le altezze verticali del riempimento di terra e della massicciata si moltiplicheranno pei rapporti $\frac{1600}{2750}$, $\frac{1800}{2750}$. Si potrà così descrivere sopra l'estradosso una linea tale che, un riempimento compreso fra essa e l'estradosso ed avente lo stesso peso specifico della vôlta farebbe lo stesso effetto del vero carico permanente.

Pel sopraccarico si prende un peso di Kgr. 600 per metro quadrato come alcuni autori consigliano, benchè sia da ritenersi che anche la massima quantità di gente, che può accalcarsi sopra un ponte, non darebbe che un carico di circa Kgr. 500 per metro quadrato. Il sopraccarico supposto equivale ad uno strato di muratura in pietra da taglio dell'altezza di metri $\frac{600}{2750} = 0,218$: si descriverà dunque al disopra della linea sopradetta che rappresenta il carico permanente ridotto in muratura di pietra da taglio, un'altra linea ad essa parallela e più alta di metri 0,218, e si otterrà così la linea limite del carico totale del ponte.

Se ora si prende per unità di peso il peso di un metro cubo di muratura della vôlta, ossia Kgr. 2750, è chiaro che il peso di un tronco qualunque di questa e del suo carico sarà espresso in numeri dall'area corrispondente.

Perciò, se si divide l'asse della semi-vôlta in sei parti uguali, e dai punti di divisione si conducono le normali al medesimo, poi dai punti ove esse incontrano l'estradosso si elevano le verticali, e si *suppone* che sopra ciascuno dei sei tronchi della semi-vôlta graviti il peso della parte di carico compreso fra le due verticali corrispondenti, si potrà trovare, colle misure scritte nella figura, l'area di ciascun tronco di vôlta e di ciascuna delle sei parti del carico: di più determinando graficamente i centri di gravità di tali aree e misurandone le distanze dalla chiave, come si vede nella figura, si potrà trovare il momento di tali aree rispetto alla chiave, perciò anche il momento della somma di tali aree.

Conosciuto il momento rispetto alla chiave di una parte qualunque della vôlta e del carico corrispondente, per es. della parte 6, 3, se ne dedurrà il momento rispetto al centro della sezione 3, che è quello necessario pel calcolo, sottraendo il momento già trovato dal prodotto che si ottiene moltiplicando il peso del tronco 6, 3 per la distanza orizzontale dei centri delle sezioni 3 e 6, ossia per 11,81. Difatti chiamando p_3 il peso del tronco 6, 3; d_3 e d'_3 le distanze orizzontali del suo centro di gravità dalla chiave e dal centro della sezione 3; D_3 la distanza orizzontale del centro della sezione 3 dalla chiave, m_3 ed m'_3 i momenti del peso p_3 rispetto alla chiave ed al centro della sezione 3, si ha:

$$m_3 = p_3\, d_3,\ m'_3 = p_3 d'_3$$

ma $d'_3 = D_3 - d_3$, dunque

$$m'_3 = p_3 D_3 - p_3\, d_3 = p_3 D_3 - m_3,$$

come si è detto.

Così operando trovansi i risultati seguenti, ove è da notare che i momenti dati nelle colonne 3, 5, 7 e 9 non son quelli presi rispetto alla chiave, ma gli altri dedotti nel modo sopradetto: così per es. pel tronco 6, 3 il momento dato è quello del detto tronco rispetto al centro della sezione 3.

I pesi ed i momenti registrati nelle colonne 8 e 9 sono ottenuti da quelli delle colonne 6 e 7 moltiplicandoli per 2750.

Tronchi	Vôlta sola		Carico		Vôlta e carico		Vôlta e carico in chilogrammi	
	Aree	Momenti	Aree	Momenti	Aree	Momenti	Aree	Momenti
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.0	39,400	422,70	43,756	312,55	83,156	735,25	228679	2021937
6.1	31,816	292,89	28,876	186,49	60,692	479,38	166903	1318295
6.2	24,783	187,93	18,046	103,15	42,829	291,08	117780	800470
6.3	18,203	105,67	10,539	50,67	28,739	156,34	79032	429935
6.4	11,958	47,16	5,700	20,46	17,658	67,62	48559	185955
6.5	5,930	11,92	2,500	4,95	8,430	16,87	23182	46392

3.° Denominazioni e formole generali.

Un arco di muratura deve sempre essere riguardato come incastrato alle estremità, giacchè è chiaro che se esso è posto in buone condizioni di resistenza, come si deve sempre supporre in un primo calcolo, deve premere sulle spalle con tutta l'ampiezza delle sue faccie di posa, ossia delle imposte. Se poi a calcolo finito risulterà che, supponendo l'incastro, vi sarebbe tensione in qualche punto dei giunti d'imposta, e se tale tensione non può aver luogo o per mancanza di cemento, o perchè non si possa contare sulla resistenza del cemento alla tensione, bisognerà riprendere il calcolo supponendo ridotte le altezze dei giunti a quelle sole parti che dal primo calcolo son risultate premute. Queste altezze si potranno ancora correggere in un terzo calcolo e così di seguito.

Perciò qui si comincierà ad esaminare la vôlta del ponte Mosca, supponendola incastrata nelle spalle, e caricata completamente, cosicchè pei tronchi 6, 0; 6, 1; 6, 2; .... si abbiano i pesi ed i momenti dati nelle due ultime colonne della tabella riportata alla fine del numero precedente.

Il carico essendo simmetrico rispetto alla chiave, lo sforzo di taglio in questa sezione sarà nullo; quindi per incognite del problema si prenderanno le due seguenti:

$M =$ momento di flessione alla chiave;

$P =$ pressione normale id.

in funzione delle quali è facile esprimere il momento di flessione, la pressione normale e lo sforzo di taglio per una sezione qualunque. Difatti, supponendo tagliata la vôlta alla chiave è chiaro che ciascuna metà della vôlta continuerà a stare in equilibrio, purchè alla chiave si applichi una pressione distribuita con legge *uniformemente varia*, e tale che la sua grandezza totale sia P e il suo momento rispetto all'orizzontale condotta pel centro della chiave, cioè la somma dei momenti elementari sia M.

Quindi per esprimere il momento di flessione, la pressione normale e lo sforzo di taglio per una sezione qualunque, p. es. per la sezione 4, bisognerà considerare la pressione applicata alla chiave e il peso del tronco 6, 4, il cui momento, rispetto al centro della sezione 4, è dato nella tabella del numero precedente, si ottiene così:

$$M_4 = M - 0{,}60 \,.\, Q + 185955$$
$$P_4 = 0{,}988 \,.\, Q + 0{,}154 \times 48550$$
$$S_4 = 0{,}154 \,.\, Q - 0{,}988 \times 48550.$$

Componendo le formole analoghe per tutte le sezioni 0, 1, 2, ... 6, eseguendo le operazioni numeriche e raccogliendo i risultati, si forma la seguente tabella:

Sezioni 1	Momenti di flessione 2	Pressioni normali 3	Sforzi di taglio 4
0	$M_0 = M - 5{,}36 \,.\, Q + 2021937$	$P_0 = 0{,}895 \,.\, Q + 102217$	$S_0 = 0{,}447\, Q - 204655$
1	$M_1 = M - 3{,}76 \,.\, Q + 1318295$	$P_1 = 0{,}925 \,.\, Q + 63085$	$S_1 = 0{,}378\, Q - 154885$
2	$M_2 = M - 2{,}40 \,.\, Q + 800470$	$P_2 = 0{,}950 \,.\, Q + 35915$	$S_2 = 0{,}305\, Q - 111897$
3	$M_3 = M - 1{,}35 \,.\, Q + 429935$	$P_3 = 0{,}973 \,.\, Q + 18177$	$S_3 = 0{,}230\, Q - 76890$
4	$M_4 = M - 0{,}60 \,.\, Q + 185955$	$P_4 = 0{,}988 \,.\, Q + 7480$	$S_4 = 0{,}154\, Q - 47987$
5	$M_5 = M - 0{,}15 \,.\, Q + 46392$	$P_5 = 0{,}996 \,.\, Q + 1815$	$S_5 = 0{,}078\, Q - 22962$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1{,}000 \,.\, Q$	$S_6 = 0$

4.° Determinazione del valore delle incognite.

È chiaro che i valori delle incognite Q ed M devono variare secondo che la volta è o non è omogenea, e specialmente secondo che gli strati di malta nei giunti hanno spessore costante in tutta la loro ampiezza, oppure spessore variabile dall'intradosso all'estradosso.

È dunque necessario premettere la descrizione della vôlta. (*)

Ora, questa è composta di 93 ordini di conci di granito i quali furono tutti esattamente tagliati in modo che per comporre con essi la volta

(*) Tutti i dati di cui si fa uso nel testo sono desunti dalla dissertazione di laurea dell'Ingegnere Carlo Mosca, nipote del celebre costruttore, oggidì Capo Riparto nelle Ferrovie dell'Alta Italia per la costruzione della linea Udine-Pontebba.

secondo l'intradosso di metri 45,00 di corda e metri 5,50 di saetta non fosse punto necessaria l'interposizione della malta. Invece l'armatura della vôlta fu costruita secondo un arco di circolo colla saetta di metri 5,75, il cui sviluppo perciò superava di 0^m, 162 quello dell'intradosso di progetto.

Per guadagnare questa differenza si disposero i conci *presso le imposte* in modo che presentassero delle commessure cuneiformi larghe all'intradosso e strettissime all'estradosso, le quali si riempirono di malta. Di queste commessure era maggiore la prima all'imposta, e diminuivano le altre gradatamente in modo da ridursi a zero dopo l'undecima, come è indicato qui appresso:

Giunti	Spessore all'intradosso	Spessore all'estradosso
1.° (all'imposta)	0,009	0,0037
2.°	0,008	0,0027
3.°	0,008	0,0034
4.°	0,007	0,0033
5.°	0,007	0,0032
6.°	0,006	0,0030
7.°	0,005	0,0024
8.°	0,005	0,0023
9.°	0,004	0,0020
10.°	0,003	0,0014
11.°	0,002	0,0009
	0,064	0,0283

In tal modo si guadagnarono 0^m, 064 sui primi undici giunti presso ciascuna imposta, ossia in tutto 0^m, 128. Per giungere a 0^m, 162 rimanevano 0^m, 034, ma questi si calcolò, come avvenne, che si dovessero perdere per le minime imperfezioni nel taglio dei conci.

Dal giunto 11 sino al 36 non si ha malta tra i conci.

A motivo però della disposizione data ai conci presso le imposte, l'angolo che il giunto 36 faceva col piano verticale condotto per la chiave era alquanto maggiore della somma degli angoli dei conci, che dovevano porsi in opera dal giunto 36 sino alla chiave, perciò si distribuì la differenza su tutti i giunti dal 36 al 47, disponendo i conci in modo che si toccassero all'intradosso, ma non all'estradosso, e riempiendo di malta i giunti. Così verso la chiave i giunti erano anch'essi cuneiformi, come alle

17

imposte ma volti in senso contrario. Le grossezze dei giunti presso la chiave risultano dalla seguente tabella:

Giunti	Spessore all'intradosso	Spessoro all'estradosso
N.° 37	0	0,001
» 38	»	0,001
» 39	»	0,002
» 40	»	0,002
» 41	»	0,003
» 42	»	0,003
» 43	»	0,004
» 44	»	0,006
» 45	»	0,007
» 46	»	0,008
» 47	»	0,008
	0	0,045

Tutta questa particolare disposizione dei conci e dei giunti venne immaginata e adottata dall'insigne costruttore per ottenere una buona distribuzione delle pressioni. Quanto fossero giustificate le sue previsioni risulta dal calcolo seguente, nel quale si supporrà per semplificare che tutti i giunti siano fatti senza interposizione di malta, salvo i due d'imposta ove si supporranno riuniti gli strati di malta dei primi undici giunti, e un giunto alla chiave ove si supporranno riuniti gli strati di malta di tutti i giunti dal 37 di destra al 37 di sinistra.

Così a ciascun imposta si avrà uno strato di malta dello spessore di metri 0,064 all'intradosso e 0,0283 all'estradosso, e alla chiave si avrà un giunto di spessore nullo all'intradosso e dello spessore di metri $0,045 \times 2 = 0,09$ all'estradosso.

Premesse queste cose si chiamino:

E, E' i coefficienti di compressibilità della pietra di cui son fatti i conci e della malta formante i giunti;

$h_0, h_1, h_2, \ldots h_6$ le altezze delle sezioni 0, 1, 2, ... 6;

$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_6$ le aree delle medesime sezioni, le quali sono numericamente uguali alle loro altezze, essendo la larghezza uguale ad 1 metro;

$I_0 = \frac{1}{12}h_0^3, I_1 = \frac{1}{12}h_1^3, \ldots I_6 = \frac{1}{12}h_6^3$ i momenti d'inerzia delle dette sezioni.

I valori di $\Omega_0, \Omega_1, \ldots \Omega_6$; $I_0, I_1, I_2, \ldots I_6$ sono riportati nella seguente tabella, ove sono pure registrati i loro complementi logaritmici.

Sezione 1	Aree 2	Momenti d'inerzia 3	Complementi logaritmici delle aree 4	Complementi logaritmici dei momenti d'inerzia 5
0	2,01	0,67672	$\bar{1}$,69680	0,16959
1	1,85	0,52704	$\bar{1}$,73283	0,27766
2	1,72	0,42404	$\bar{1}$,76447	0,37259
3	1,62	0,35429	$\bar{1}$,79049	0,45064
4	1,55	0,31032	$\bar{1}$,80967	0,50819
5	1,51	0,28691	$\bar{1}$,82102	0,54225
6	1,50	0,28125	$\bar{1}$,82391	0,55091

Se l'arco fosse tutto di granito, cioè se i tre giunti teorici alle imposte e alla chiave invece di essere riempiti con cunei di malta lo fossero con cunei anch'essi di granito, il lavoro di deformazione di tutta la vôlta, trascurando la parte dovuta allo scorrimento trasversale, sarebbe data dalla formola:

$$2 \times \frac{4,00}{2E}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{M_0^2}{I_0} + 4\frac{M_1^2}{I_1} + 2\frac{M_2^2}{I_2} + \ldots + \frac{M_6^2}{I_6}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{P_0^2}{\Omega_0} + \frac{P_1^2}{\Omega_1} + \frac{P_2^2}{\Omega_2} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{P_6^2}{\Omega_6}\right)\right\} \quad (1)$$

Ma per avere il vero lavoro di deformazione della vôlta bisogna sottrarre da questa formola il lavoro di deformazione dei tre cunei di granito che mancano nei tre giunti, ed aggiungere quello dei tre cunei di cemento che ne tengono il posto.

Ora, per un cuneo di granito, che abbia all'estradosso lo spessore a', all'intradosso lo spessore a'', che sia sottoposto alla pressione P normale alla sezione media e al momento di flessione M il lavoro di deformazione è dato dalla formola:

$$\frac{1}{2E}\frac{a' + a''}{2}\left(\frac{P^2}{\Omega} + \frac{M^2}{I} + \frac{a'' - a'}{a'' + a'}\frac{4MP}{h\Omega}\right)$$

h essendo l'altezza della sezione Ω, ed I il suo momento d'inerzia.

Per un cuneo di malta uguale al precedente e sottoposto ai medesimi sforzi il lavoro di deformazione è dato dalla stessa formola cambiando E in E'; dunque la differenza dei due lavori sarà:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right)\frac{a' + a''}{2}\left(\frac{P^2}{\Omega} + \frac{M^2}{I} + \frac{a'' - a'}{a'' + a'}\frac{4MP}{h\Omega}\right)$$

Ora, per ciascuno dei giunti alle imposte si ha:

$$P = P_0,\quad M = M_0,\quad \Omega = \Omega_0,\quad I = I_0,\quad h = h_0$$
$$a' = 0{,}0283,\quad a'' = 0{,}064\,;$$

e pel cuneo alla chiave si ha:

$$P = P_6,\quad M = M_6,\quad \Omega = \Omega_6,\quad I = I_6\quad h = h_6$$
$$a' = 0{,}09\,,\quad a'' = 0$$

quindi la formola da aggiungersi alla (1) per avere l'espressione completa del lavoro di deformazione della vôlta sarà:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right)\left\{0{,}0923\left(\frac{P_0^2}{\Omega_0} + \frac{M_0^2}{I_0} + 1{,}547\,\frac{M_0 P_0}{h_0 \Omega_0}\right) + 0{,}045\left(\frac{P_6^2}{\Omega_6} + \frac{M_6^2}{I_6} - 4\,\frac{P_6 M_6}{h_6 \Omega_6}\right)\right\} \ldots (2)$$

Sostituendo ad $M_0, M_1, M_2, \ldots P_0, P_1, P_2, \ldots$ i loro valori in funzione di M e Q dati dalla tabella A riportata al num. 3, e dando ad $I_0, I_1, I_2, \ldots \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ i loro valori numerici qui sopra riportati, si ottiene:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{M_0^2}{I_0} + 4\,\frac{M_1^2}{I_1} + 2\,\frac{M_2^2}{I_2} + 4\,\frac{M_3^2}{I_3} + 2\,\frac{M_4^2}{I_4} + 4\,\frac{M_5^2}{I_5} + \frac{M_6^2}{I_6}\right) = 10{,}34\,.\,M^2 - 22{,}98\,.\,2\,M\,Q$$
$$+ 66{,}67\,.\,Q^2 + 7\,818\,893\,.\,2\,M - 23\,340\,905\,.\,2\,Q$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{P_0^2}{\Omega_0} + \frac{P_1^2}{\Omega_1} + \frac{P_2^2}{\Omega_2} + \frac{P_3^2}{\Omega_3} + \frac{P_4^2}{\Omega_4} + \frac{P_5^2}{\Omega_5} + \frac{1}{2}\,\frac{P_6^2}{\Omega_6} = 3{,}39\,.\,Q^2 + 91\,020\,.\,2\,Q$$

$$\frac{P_0^2}{\Omega_0} + \frac{M_0^2}{I_0} + 1{,}547\,\frac{M_0 P_0}{h_0 \Omega_0} = 1{,}50\,.\,M^2 - 7{,}87\,.\,2\,M\,Q + 41\,64\,.\,Q^2$$
$$+ 3\,052\,775\,.\,2\,M - 15\,966\,225\,.\,2\,Q$$

$$\frac{P_6^2}{\Omega_6} + \frac{M_6^2}{I_6} - 4\,\frac{M_6 P_6}{h_6 \Omega_6} = 3{,}56\,.\,M^2 - 0{,}889\,.\,2\,M\,Q + 0{,}67\,.\,Q^2$$

onde la formola (1) diventa:

$$2 \times \frac{4{,}00}{2\,E}(16{,}34\,.\,M^2 - 22{,}98\,.\,2\,M\,Q + 70{,}06\,.\,Q^2 + 7818893\,.\,2\,M - 23249885\,.\,2\,Q) \quad (3)$$

e la formola (2):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right)(0{,}2984\,.\,M^2 - 0{,}766\,.\,2\,M\,Q + 3{,}876\,.\,Q^2 + 281765\,.\,2\,M - 1466630\,.\,2\,Q) \quad (4)$$

Bisognerebbe ora far la somma delle due espressioni (3) e (4); ma per ciò è necessario conoscere i valori dei coefficienti E, E' od almeno il loro rapporto. Ora, nessuna esperienza attendibile si ha sulla compressibilità del granito e delle malte: siccome però le malte quando sono fresche, come appunto avveniva al ponte Mosca, devono essere molto compressibili, mentre invece il granito è sicuramente pochissimo compressibile, si supporrà qui che la compressibilità della malta adoperata nei giunti del ponte Mosca, fosse, all'epoca del disarmo e della successiva costruzione dei rinfianchi, cento volte maggiore di quella del granito, cioè supporremo:

$$\frac{E'}{E} = 100.$$

Ammesso questo rapporto la formola (4) può scriversi sotto la forma seguente:

$$2 \times \frac{4,00}{2E} (3,60 . M^2 - 9,48 . 2MQ + 47,94 . Q^2 + 3\,486\,835 . 2M - 18\,148\,625 . 2Q)$$

Sommando questa formola colla (3) si ottiene, per esprimere il lavoro totale di deformazione della vôlta:

$$2 \times \frac{4,00}{2E} (20,03 . M^2 - 32,46 . 2MQ + 118,00 . Q^2 + 11\,305\,728 . 2M - 41\,398\,510 . 2Q)$$

Ora le condizioni geometriche a cui la vôlta deve soddisfare nel deformarsi sono le due seguenti:

1.ª La sezione alla chiave deve restare verticale anche dopo la deformazione, e perciò la sua rotazione dev'essere nulla.

2.ª La stessa sezione deve discendere verticalmente, cioè il suo spostamento orizzontale dev'essere nullo.

I valori di M e Q che soddisfanno a queste due condizioni sono quelli che rendono nulle le derivate dal lavoro di deformazione della vôlta rispetto ad M e Q. Si hanno dunque le due equazioni seguenti:

$$20,03 . M - 32,46 . Q + 11\,305\,728 = 0$$
$$-32,46 . M + 118,00 . Q - 41\,398\,510 = 0$$

dalle quali si ricava:

$$Q = 352\,990$$
$$M = 7\,690.$$

5.° Curva delle pressioni e massimi sforzi per metro quadrato.

Se nella tabella del N.° 3 si sostituiscono ad M e Q i loro valori testè trovati, si ottengono per i momenti di flessione, le pressioni normali e gli sforzi di taglio nelle sezioni 0, 1, 2,... del ponte i valori scritti nelle colonne 2.ª, 3.ª e 4.ª della tabella qui sotto riportata. Dividendo i momenti di flessione per le pressioni normali corrispondenti, si ottengono i numeri della 5.ª colonna, i quali dànno le distanze dei centri di pressione dei centri delle sezioni.

Per mezzo della formola:

$$\frac{P}{\Omega} \pm \frac{M v}{I}$$

nella quale P ed M rappresentano la pressione normale e il momento di flessione in una sezione, e Ω, I, v l'area, il momento d'inerzia e la semi-altezza della medesima, si ottengono le pressioni per metro quadrato all'intradosso e all'estradosso nelle sezioni considerate. Tutti questi risultati sono raccolti nella seguente tabella:

Sezioni 1	Momenti di flessione 2	Pressioni normali 3	Sforzi di taglio 4	Curva delle pressioni 5	Pressioni per m. q. all'intradosso 6	Pressioni per m. q. all'estradosso 7
0	+ 137627	418137	— 40865	+ 0,329	412425	3635
1	— 1315	380595	— 20055	— 0,003	212905	208305
2	— 38090	371245	— 4237	— 0,105	294915	130765
3	— 38895	301627	+ 4296	— 0,108	312155	134305
4	— 18145	356230	+ 6372	— 0,051	275146	184514
5	+ 1135	353385	+ 4571	+ 0,003	237011	231045
6	+ 7690	352090	0	+ 0,022	255907	214093

Vedesi che la distanza dei centri di pressione dai centri delle sezioni è dappertutto minore della sesta parte dell'altezza delle sezioni corrispondenti, cioè la curva delle pressioni è tutta contenuta nel terzo medio della volta: d'onde segue che in nessun punto tende a prodursi tensione, ma che si ha invece pressione in tutta l'estensione della vôlta.

La pressione massima ha luogo all'intradosso delle sezioni d'imposta ed è di Kgr. 412 425 per metro quadrato, ossia di Kgr. 41,24 per centimetro quadrato.

Questa pressione non è certo troppo grande pel granito impiegato nella costruzione del ponte Mosca, ma essa sarebbe enorme per le malte, alcune delle quali cominciano a schiacciarsi sotto una pressione anche minore di 40 Kgr. per centimetro quadrato.

Tuttavia bisogna qui fare una osservazione importante.

Se il disarmo di una vôlta ha luogo dopo che le malte hanno fatto buona presa, esse possono benissimo schiacciarsi sotto la pressione massima sopra determinata, e uscire a poco a poco dai giunti compromettendo così la stabilità della vôlta.

Ma se il disarmo ha luogo prima che le malte abbiano fatto buona presa, esse si comprimono bensì maggiormente, ma i grani di sabbia, che le compongono, non possono cadere, perchè tenuti insieme dalla calce non ancora indurita. In questo caso la presa delle malte si fa sotto la pressione stessa che esse devono poscia sopportare, ed è quindi evidente che dopo la presa lo schiacciamento non può più aver luogo.

Per queste ragioni sembra che le grandi vôlte, nelle quali le massime pressioni per centimetro quadrato sono molto forti, dovrebbero venir disarmate poco tempo dopo la chiusura; mentre invece le vôlte di mediocre o di piccola ampiezza nelle quali le massime pressioni per centimetro quadrato sono sempre una piccola frazione di quelle capaci di produrre lo schiacciamento delle malte, il disarmo potrà farsi anche dopo il rassodamento delle medesime.

6.° Studio della distribuzione delle forze interne nella vôlta, nel caso che in nessuno dei giunti si fosse interposta della malta.

In questo caso è chiaro che in nessun punto della vôlta può prodursi tensione, giacchè i cunei che la compongono sono semplicemente posati l'uno contro l'altro. Bisognerà dunque esaminare dapprima se in qualche punto tende a prodursi tensione, e se ciò ha luogo, ne seguirà che le vere sezioni resistenti della vôlta, nei luoghi ove la tensione tende a prodursi, sono minori delle sezioni apparenti. Si determinerà poi col metodo delle successive approssimazioni la grandezza vera delle sezioni resistenti.

Per riconoscere se in qualche punto tende a prodursi tensione bisogna riguardar la vôlta come un monolite *incastrato* nelle spalle e non semplicemente appoggiato alle medesime.

In questo caso il lavoro di deformazione della vôlta è espresso dalla formola (1) del N.° 4, o dalla (3). Uguagliando a zero le derivate di quest'ultima rispetto ad M e Q, e dividendo poscia pel fattor numerico $2 \times \frac{4{,}00}{E}$, si ottengono le due equazioni:

$$16{,}34 . M - 22{,}98 . Q + 7\,818\,893 = 0$$
$$-22{,}98 . M + 70{,}06 . Q - 23\,249\,385 = 0$$

dalle quali si trae:

$$M = -21\,800, \ (*)$$
$$Q = 324\,710.$$

(*) Si osservi che il valore negativo del momento di flessione alla chiave indica che ivi la curva delle pressioni passa al disopra del centro della sezione. La distanza alla quale passa, è data da

$$\frac{21800}{324710} = 0^{m},007.$$

Tenendo conto della malta si è visto che aveva luogo pressione in tutti i punti e che perciò la vôlta si comportava come un monolite: però in tal caso la curva delle pressioni alla chiave passava al disotto del centro della sezione. Vedesi da ciò quanto sia grande l'influenza dei cunei di malta dotati d'una compressibilità molto maggiore di quella de granito col quale è fatta la vôlta.

Sostituendo questi valori nella tabella data alla fine del N.° 3 si vede facilmente che la curva delle pressioni passa nel terzo medio per tutta l'estensione della vôlta salvo per un tronco della lunghezza di circa metri 2,80 presso ciascuna imposta. In questo tronco la curva delle pressioni passa al disotto dell'asse della vôlta, onde segue che questa si apre verso l'estradosso, come era facile prevedere attesa la sua piccola monta.

Per la sezione d'imposta si trova:

$$M_0 = 259\,737$$

$$P_0 = 392\,827$$

e la distanza del centro di pressione dal centro della sezione risulta:

$$\frac{259\,737}{392\,827} = 0{,}66\,;$$

ossia, assai maggiore della sesta parte dell'altezza della sezione, che è:

$$\frac{2{,}01}{6} = 0{,}335.$$

Se la vôlta fosse un monolite incastrato alle estremità, cosicchè potesse aver luogo tensione, si potrebbe ora cercare per qual parte della sezione avrebbe luogo pressione e per quale avrebbe luogo tensione. Bisognerebbe perciò determinare il punto in cui la pressione è nulla. Detta y la distanza di questo punto dall'asse di flessione (misurata questa distanza nella semisezione superiore), si ha l'equazione:

$$\frac{P_0}{\Omega_0} - \frac{M_0}{I_0}\,y = 0$$

donde, sostituendo a P_0, M_0, Ω_0, I_0 i loro valori, si ottiene:

$$y = 0{,}508.$$

Dunque l'altezza della parte premuta sarebbe:

$$\frac{2{,}01}{2} + 0{,}508 = 1{,}513$$

e quella della parte tesa

$$\frac{2{,}01}{2} - 0{,}508 = 0{,}497$$

Questi risultati non hanno luogo nel caso considerato, perchè la vôlta può aprirsi all'estradosso. Per determinare di quanto si aprirà, noi supporremo ora che la vera sezione resistente all'imposta sia press'a poco uguale alla parte di sezione che sarebbe premuta nel caso ipotetico sopra considerato, ossia l'altezza resistente della sezione alle imposte sia di metri 1,50 a partire dall'intradosso.

Per le altre sezioni 1, 2, 3, ..., 6, l'altezza apparente è uguale a quella resistente, giacchè, come abbiam detto di sopra, tali sezioni sono premute in tutta la loro estensione.

Per le sezioni d'imposta essendo cambiata l'altezza, cambia pure il centro, o meglio l'asse di flessione, il quale viene ora a trovarsi alla distanza di metri 0,75 dall'intradosso; quindi cambia il momento di flessione M_0, perchè cambia il braccio di leva della spinta Q applicata alla chiave e dei pesi di cui la vôlta è caricata: così pure cambiano le espressioni di P_0 ed S_0, perchè cambia l'asse della vôlta nell'ultimo tronco presso le imposte, e quindi anche l'angolo che la tangente all'ultimo elemento di quest'asse fa colla verticale. In quanto ai pesi è chiaro che essi sono ancora gli stessi come nei casi sopra considerati.

Quindi la tabella data alla fine del N.° 3 ha ancora luogo nel caso presente, salvo le espressioni di M_0, P_0, S_0, le quali diventano: (*)

$$M_0 = M - 5{,}58 \, . \, Q + 1\,996\,782$$

$$P_0 = 0{,}860 \, . \, Q + 116\,626$$

$$S_0 = 0{,}510 \, . \, Q - 196\,664 \, ;$$

inoltre l'area e il momento d'inerzia della nuova sezione all'imposta hanno i valori seguenti:

$$\Omega_0 = 1{,}50$$

$$I_0 = 0{,}281\,25.$$

(*) L'asse della vôlta nell'ultimo tronco si traccierà in modo che alle imposte passi a $0^m{,}75$ al di sopra dell'intradosso. Per non rendere confusa la figura non si è indicata questa operazione, ma ciascuno può farla facilmente. Per chiarezza si mettono qui a confronto alcuni dati necessari per comporre le espressioni di M_0, P_0, S_0, tanto nel caso sopra considerato in cui la sezione 0 si supponeva tutta resistente, quanto nel caso presente in cui si suppone la parte resistente ridotta a metri 1,50.

	Altezza della sezione 0	
	$= 2^m{,}01$	$= 1^m{,}50$
Distanza verticale del centro della sezione 0 dall'orizzontale passante pel centro della chiave	5, 36	5, 58
Distanza orizzontale del centro della sezione 0 dal piano verticale di chiave .	23, 05	23,05 − 0,11
Seno dell'angolo che la sezione 0 fa colla verticale	0,447	0,510
Coseno idem idem	0,895	0,860

Avvertendo poi che il peso del tronco 0,6 è di Kgr. 228 679, e il suo momento rispetto al centro della primitiva sezione 0 è di Kgr. 2 021 937. (Tabella data alla fine del N.° 3, colonna 8.ª linea 1.ª), si ottengono i numeri dati nel testo nel modo seguente:

$$1\,996\,782 = 2\,021\,937 - 228\,679 \times 0{,}11 \, ;$$

$$116\,626 = 228\,679 \times 0{,}510 \, ;$$

$$196\,664 = 228\,679 \times 0{,}860.$$

Con questi nuovi valori di M_0, P_0, I_0, Ω_0, il lavoro di deformazione della vôlta espresso dalla formola (1) del N.° 4, diventa, sopprimendovi il fattor numerico $2 \times \frac{4,00}{E}$;

$$\frac{1}{2}(17,03 \,.\, M^2 - 26,95 \,.\, 2\,M\,Q + 92,80 \,.\, Q^2 + 9\,189\,493 \times 2\,M - 31\,309\,780 \times 2\,Q).$$

Uguagliando a zero le derivate di quest'espressione rispetto ad M e Q, si ottengono le due equazioni seguenti:

$$17,03 \,.\, M - 26,95 \,.\, Q + 9\,189\,493 = 0$$
$$-26,95 \,.\, M + 92,80 \,.\, Q - 31\,309\,780 = 0$$

dalle quali si trae:

$$Q = 333\,960$$
$$M = -11\,120.$$

Con questi valori le espressioni di M_0 e P_0 date qui sopra diventano:

$$M_0 = 122\,166$$
$$P_0 = 403\,832,$$

onde segue che, all'imposta la curva delle pressioni passa al disotto del centro della sezione, come si poteva prevedere, ad una distanza di metri:

$$\frac{122\,166}{403\,832} = 0,30;$$

questa distanza è maggiore di $\frac{1,50}{6} = 0,25$, che è il sesto dell'altezza della sezione, e perciò la curva delle pressioni esce ancora dal terzo medio.

Cerchiamo anche in questo caso l'altezza della parte premuta della sezione, supponendo che la rimanente parte fosse capace di resistere alla tensione: detta y la distanza dell'asse neutro dall'asse di flessione, si ha l'equazione:

$$\frac{P_0}{\Omega_0} - \frac{M_0}{I_0}\,y = 0$$

ossia:

$$269\,221 - 434\,350 \,.\, y = 0$$

dalla quale si trae:

$$y = 0,62.$$

Dunque l'altezza della parte premuta sarebbe:

$$\frac{1,50}{2} + 0,62 = 1,37$$

e quella della parte tesa:

$$\frac{1,50}{2} - 0,62 = 0,13.$$

Si potrebbe ora procedere ad un terzo calcolo di approssimazione prendendo $1^m,37$ per altezza della sezione all'imposta. Ma per la pratica basterà generalmente la seconda approssimazione e si può ritenere con sufficiente esattezza che la parte premuta della sezione all'imposta sarà di $1^m,37$, e che quindi nel disarmo della vôlta considerata questa si aprirà per un'altezza di metri $2,01 - 1,37 = 0,64$ a partire dall' estradosso.

Se si vuole maggiore approssimazione anche senza fare per la sezione di $1^m,37$ il calcolo già fatto per le sezioni di metri 2,01 e 1,50, si potrà ottenere nel modo seguente.

Dicasi $1,37 - x$ la vera sezione premuta: è chiaro che nel primo calcolo con una sezione di 2,01 ossia maggiore della vera di $0^m,64 + x$, si è trovata la parte premuta di $1^m,513$, ossia maggiore della vera di $0^m,143 + x$; nel secondo calcolo, invece, con una sezione $1^m,50$ ossia maggiore della vera di $0^m,13 + x$, si è trovato l'errore x nell'altezza della parte premuta. Si potrà dunque per approssimazione determinare x colla proporzione seguente:

$$0,64 + x : 0,143 + x = 0,13 + x : x,$$

la quale, uguagliando il prodotto dei medii a quello degli estremi, si riduce ad un'equazione del 1.° grado.

Si ottiene così:

$$x = 0,042.$$

Dunque l'altezza della sezione premuta sarà con molta approssimazione:

$$1,37 - 0,042 = 1,328,$$

onde segue che nel disarmo della vôlta questa si aprirà per un'altezza di metri

$$2,01 - 1,328 = 0,682$$

a partire dall'estradosso.

In quanto al valore totale della pressione normale all' imposta essa si può riguardare come uguale a quella ottenuta nella seconda approssimazione, e siccome ora la curva delle pressioni all'imposta passa al limite del terzo medio per la sezione effettivamente premuta, cosicchè la pressione massima per metro quadrato è doppia della pressione media, ne segue che la detta pressione massima sarà di Kgr.

$$\frac{403832}{1,328} \times 2 = 608200$$

ossia di Kilogr. 60,82 per centimetro quadrato.

Conclusione.

Siccome tale pressione non sarebbe eccessiva pel granito del Malanaggio impiegato nella costruzione della vôlta, vedesi che questa avrebbe potuto essere costrutta con sufficiente solidità anche senza ricorrere alle disposizioni speciali immaginate dal celebre costruttore Ingegnere Carlo Mosca. Però dal confronto dei risultati ottenuti appare manifesto quanto siano state utili tali disposizioni per la stabilità del ponte, giacchè esse hanno ridotto a Kgr. 41,24 per centimetro quadrato la massima pressione, la quale altrimenti sarebbe riuscita di Kgr. 60,82.

ÉTUDE DU PONT EN PIERRE DE TAILLE

construit sur la Doire à Turin, par l' ingénieur Charles Mosca.

Fig. 1.

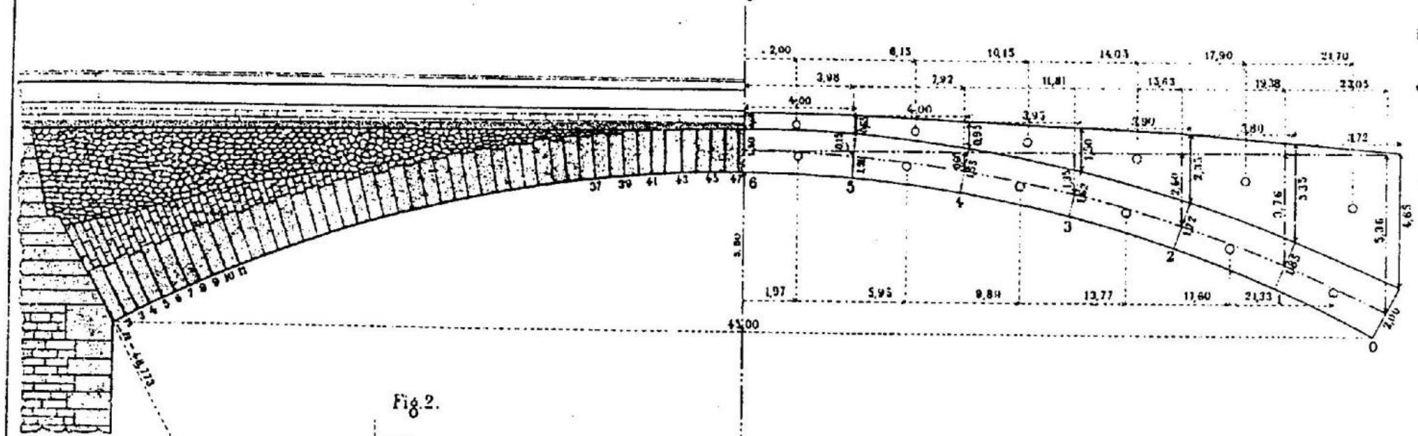


Fig. 4.

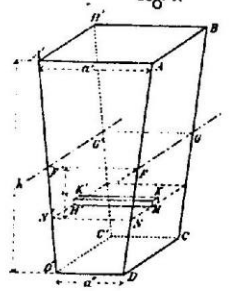


Fig. 2.

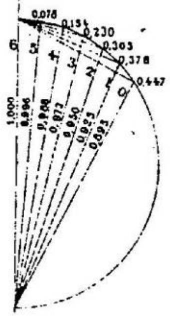
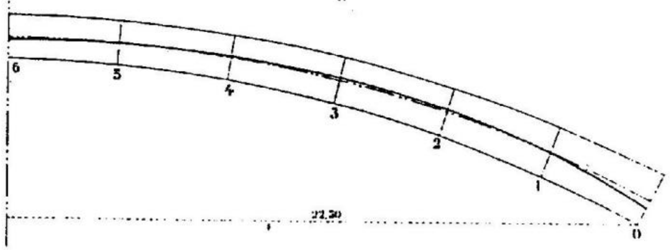
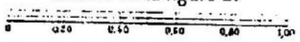


Fig. 3.



Échelle de la figure 2.



Échelle des figures 1 et 3.