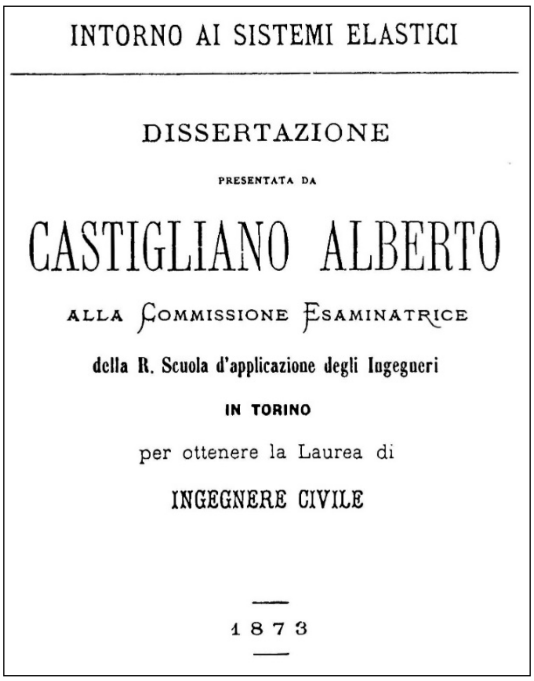
CASTIGLIANO *PIONIERE* DELLA MODERNA ANALISI STRUTTURALE

Estratto (con brevi aggiunte chiarificatrici) da:
Giuseppe Stagnitto, *MECCANICA E STRUTTURE DA ARCHIMEDE ACASTIGLIANO. Evoluzione storica della Meccanica Teorica ed Applicata all'Analisi delle Strutture*, Università degli Studi di Pavia, Dipartimento di Meccanica Strutturale, RS-05/99.

1. La vita e la produzione scientifica

Alberto Castigliano nacque ad Asti nel 1847. Diplomato perito meccanico, fu per quattro anni Professore di Costruzioni nell'istituto tecnico di Terni (in Umbria).
In quegli anni studiò indefessamente matematica sui più autorevoli trattati del tempo.
Nel 1870 superò l'esame di ammissione alla Facoltà di Scienze fisiche matematiche naturali.
Chiese al rettore di sostenere in un anno tutti gli esami del triennio.
Era un caso senza precedenti: la Facoltà chiese autorizzazione al Ministro che la concesse.
Castigliano superò brillantemente tutti gli esami e si poté iscrivere alla Scuola di Applicazione per Ingegneri di Torino.
Seguendo il modello delle grandi scuole francesi la Scuola durava due anni ed era successiva al triennio universitario.
Castigliano si laureò nel 1873, classificandosi secondo su 76 allievi e lo stesso anno fu assunto dalle Ferrovie dell'Alta Italia.


INTORNO AI SISTEMI ELASTICI

DISSERTAZIONE

PRESENTATA DA

CASTIGLIANO ALBERTO

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

della R. Scuola d'applicazione degli Ingegneri

IN TORINO

per ottenere la Laurea di

INGEGNERE CIVILE

1873

Nel dicembre del 1875 Castigliano compone la memoria *Nuova Teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici* che rappresenta il cuore della sua attività scientifica.

Il Socio Cav. Giovanni CURIONI presenta e legge alla Classe una Memoria del sig. Alberto CASTIGLIANO, Ingegnere delle Strade ferrate dell'Alta Italia, intitolata:

NUOVA TEORIA

INTORNO ALL' EQUILIBRIO

DEI SISTEMI ELASTICI

La memoria fu presentata dal Prof. Curioni (predecessore del Guidi alla Cattedra di Scienza delle Costruzioni di Torino) all'Accademia delle Scienze di Torino.
La memoria è tutta fondata sul significato e sull'utilità del *teorema delle derivate del lavoro*: questo teorema compariva già come enunciato in una precedente memoria del gennaio 1875 (*Intorno all'equilibrio dei sistemi elastici*) e come semplice passaggio matematico nella sua tesi di laurea del 1873 (*Intorno ai sistemi elastici*).

Sintesi chiarificatrice: nella tesi di laurea (1873) Castigliano, per ricavare il minimo del funzionale del lavoro di deformazione, ne annulla le derivate rispetto a forze, senza avere ancora compreso il significato fisico delle derivate stesse. Solo due anni dopo Castigliano comprende che le derivate esprimono spostamenti e che pertanto il Principio di Menabrea è solo un corollario (Castigliano scrive "semplice osservazione") del suo teorema delle derivate del lavoro.

Nel 1878 Castigliano è capo sezione dell'Ufficio d'Arte a Milano: suo compito è la direzione di progetti nuovi e la verifica di oper esistenti.
Colse l'occasione per dimostrare l'utilità pratica del suo metodo, studiando il ponte stradale sulla Dora a Torino, progettato dall'Ing. Mosca, nella memoria intitolata *Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici.*

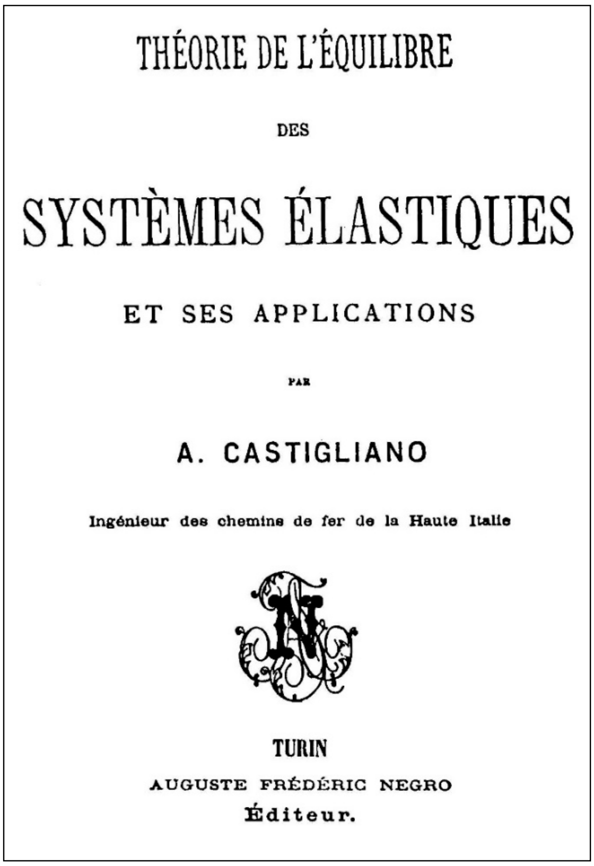
STRADE FERRATE DELL' ALTA ITALIA

Servizio della Manutenzione e dei Lavori

APPLICAZIONI PRATICHE DELLA TEORIA SUI SISTEMI ELASTICI

STUDI DELL' UFFICIO D'ARTE

Nel 1879 Castigliano pubblicò la sua opera più famosa , composta riunendo la *Nuova Teoria* del 1875 e le *Applicazioni* del 1878.



THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE

DES

SYSTÈMES ÉLASTIQUES

ET SES APPLICATIONS

PAR

A. CASTIGLIANO

Ingénieur des chemins de fer de la Haute Italie

TURIN

AUGUSTE FRÉDÉRIC NEGRO

Éditeur.

La *Théorie* ebbe fortuna soprattutto in Germania.
Müller Breslau, autore di un famoso trattato sul calcolo delle strutture, dedicò il libro a Castigliano. Egli scrisse:
"L'applicazione di questi teoremi in confronto ai metodi anteriori ...è tanto più vantaggiosa quanto più gravi sono le difficoltà da risolvere".

Negli anni successivi Castigliano lavorò ad un nuovo tipo di regolo calcolatore che comparve all'Esposizione Nazionale di Milano del 1881: permetteva di eseguire moltiplicazioni e divisioni con la precisione dello 0,5 per mille.

Nel 1884 muore di polmonite ad appena 36 anni.
Stava lavorando ad un Manuale pratico per gli ingegneri.
Il Crotti scrisse che proprio in quei giorni:
"Castigliano erasi accinto a redigere una tabella di calcoli fatti, ben inteso con i suoi metodi rigorosi, per avere a colpo d'occhio il valore della spinta, del momento e del taglio prodottisi in chiave d'un arco qualunque di spessore variabile per effetto di un carico finito in posizione qualunque. Era una tabella a quadrupla entrata"

Era l'applicazione ad una struttura iperstatica ad inerzia variabile del concetto di linea di influenza, introdotto nel 1868 da Winkler per gli archi e da Mohr per le travi.

2. La *Nuova teoria* dell'equilibrio dei sistemi elastici

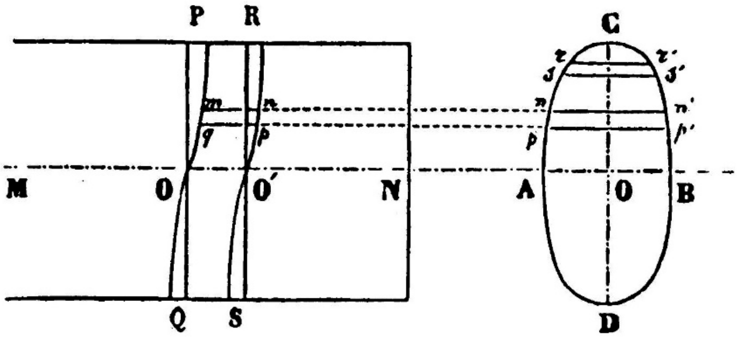
Castigliano afferma che il teorema delle derivate del lavoro di deformazione *"basta per risolvere tutte le questioni che si presentano nella pratica intorno all'equilibrio dei sistemi elastici. Si vedrà pure che esso contiene come applicazione e meglio come semplice osservazione il* principio di elasticità *del Generale Menabrea"*.

I due nuovi teoremi che Castigliano riunisce in uno solo che chiama ***teorema delle derivate del lavoro di deformazione***, sono i seguenti:

1° Se per un sistema elastico qualunque il lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze esterne si differenzia rispetto ad una di queste forze, la derivata che si ottiene, esprime lo spostamento del punto di applicazione della forza proiettato sulla sua direzione.
2° Se la medesima espressione del lavoro di deformazione si differenzia rispetto ad una coppia, la derivata che si ottiene, esprime la rotazione della linea, che congiunge i punti di apllicazione delle due forze della coppia".

3. Espressione del lavoro di deformazione

Nella *Nuova Teoria* Castigliano sviluppa le formule che esprimono il lavoro di deformazione dovute al momento flettente, all'azione normale e al taglio (non compaiono le azioni torcenti perché il trattato si occupa esclusivamente di sistemi piani).



Il lavoro di deformazione tra due sezioni infinitamente vicine - le quali comprendono un elemento di trave elastica di lunghezza *ds* - è dato dalla seguente espressione:

$$dL = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{E\Omega} + \frac{AP^2}{E_t \Omega} \right) \cdot ds$$

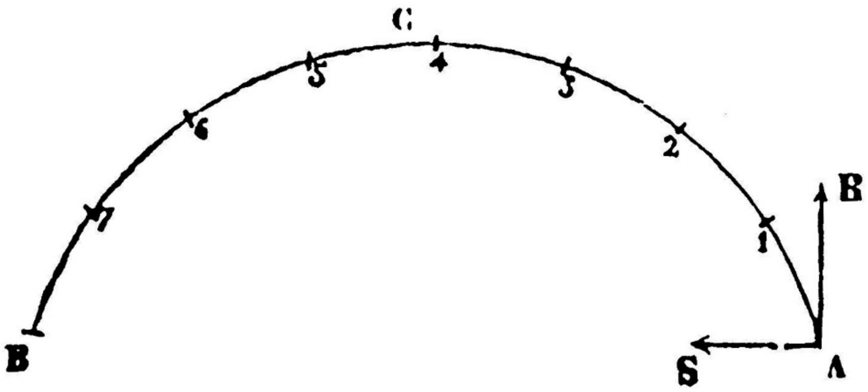
Rispetto alla notazione odierna, nella formula precedente, Castigliano indica con:
- *T*, la forza assiale (oggi indicata con *N*);
- Ω,l'area della sezione (oggi indicata con *A*);
- E_t , il modulo di elasticità trasversale (oggi indicato con *G*);
- *P,* la forza di taglio (oggi indicata con *V*);
- *A*, il coefficiente numerico, dipendente dalla forma della sezione, che coincide con l'inverso dell'attuale fattore di taglio χ .

Fatte queste sostituzioni si ottiene l'espressione del lavoro elementare nella forma per noi più usuale:

$$dL = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{EA} + \chi \frac{V^2}{GA} \right) \cdot ds$$

4. Applicazione del teorema di Castigliano allo studio dell'arco

Castigliano applica il teorema delle derivate del lavoro allo studio degli archi, *qualunque sia la loro forma e la legge con cui sono caricati.*



Si divida l'arco in un certo numero di parti uguali (nella figura l'arco è stato suddiviso in 8 parti).
Si scelgono quali incognite iperstatiche:
- la forza verticale ***R***
- la spinta orizzonate ***S***
- il momento $\boldsymbol{M_O}$

NOTA: nella figura precedente, tratta dalla *Nuova teoria*, il simbolo grafico del momento M_0 non è disegnato.

In ciascuna delle sezioni considerate si calcoleranno le azioni flettenti *M*, le azioni assiali *N*, le azioni di taglio *V* in funzione dei carichi esterni *F* e delle tre iperstatiche.
Quindi si integrerà su tutta la struttura l'espressione del lavoro elementare ottenendo il lavoro di deformazione complessivo *L*.

$$L = L(R, S, M_0)$$

Ottenuto il lavoro L in funzione delle incognite R, S, M_O, se ne eguaglieranno a zero le derivate rispetto ad esse, con che si esprimerà che la sezione O non può né spostarsi parallelamente a se stessa, né ruotare, e si ottengono così tre equazioni dalle quali si ricavano i valori delle incognite.

Pertanto le tre equazioni risolventi sono:

$$\frac{\partial L}{\partial R} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial S} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_0} = 0$$

Questa equazioni corrispondono alle condizioni di minimo secondo il principio del generale Menabrea (che, come visto, Castigliano definisce *semplice osservazione* che si può trarre dal suo Teorema).

Sintesi chiarificatrice: in funzione delle forze esterne F (note) e delle tre iperstatiche, si calcolano, in ciascuna sezione, le azioni interne:

$$M = M(F; R, S, M_0), \quad N = N(F; R, S, M_0), \quad V = V(F; R, S, M_0)$$

e quindi si esprime direttamente il lavoro di deformazione (funzione delle azioni interne) in funzione delle sole iperstatiche:

$$L = L(M, N, V) \quad \rightarrow \quad L(F; R, S, M_0\,) \quad \rightarrow \; L(R, S, M_0\,)$$

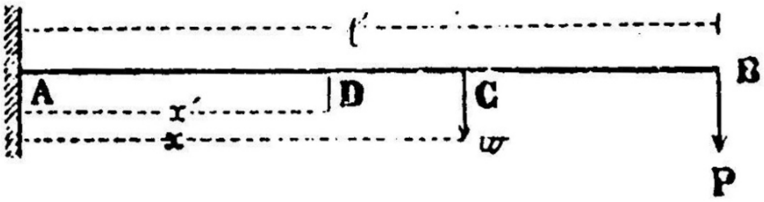
Nel caso di vincoli non cedevoli, la risoluzione della struttura iperstatica tramite l'applicazione del teorema di Castigliano conduce all'*annullamento di tutte le derivate parziali* e pertanto esprime la stazionarietà del lavoro L nello spazio delle iperstatiche (principio di Menabrea).

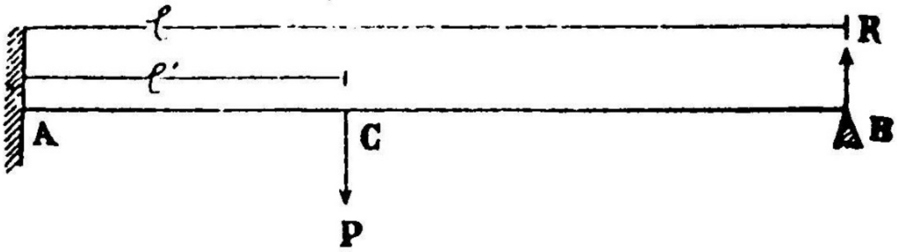
"Si osservi che tutti questi calcoli non richiedono che semplici operazioni aritmetiche (Castigliano aveva esplicitato il metodo di integrazione numerica e quindi i coefficienti delle equazioni di minimo), *cosicché il metodo esposto può essere imparato materialmente e applicato con sicurezza anche da chi non abbia che scarse cognizioni matematiche, il che tutti sanno quanto sia utile in pratica".*

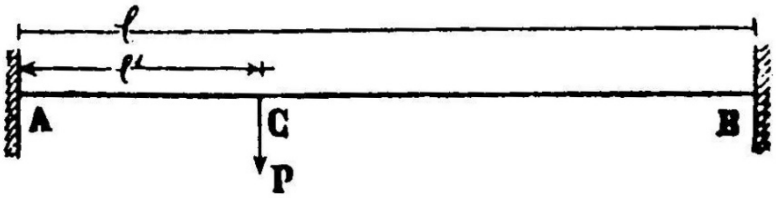
Quest'ultima osservazione è profetica del moderno calcolo strutturale computerizzato, in quanto l'operatore ausiliario può eseguire una serie predisposta di calcoli, senza necessità della consapevolezza concettuale delle operazioni.

5. Tre problemi tratti dalla *Nuova Teoria*

Il teorema delle derivate del lavoro è applicato al problema di determinare le deformazioni e le reazioni incognite di travi isolate.
Sono considerate:
- una trave incastrata in un solo estremo (Problema 1°)
- una trave incastrata in un estremo e appoggiata in un altro (Problema 2°)
- una trave doppiamente incastrata (Problema 3°)







Problema 1°

E' considerato il caso di una trave incatrata in un estremo **A**, caricata da un carico distribuito *p* su tutta la sua lunghezza e da un carico concentrato *P* all'estremo libero **B**.

In un generico punto **C**, di ascissa *x*, si consideri applicata un ulteriore forza ω.
Il lavoro di deformazione si può esprimere in funzione di *P, p,* ω
Trascurando l'effetto dello scorrimento trasversale si ha:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \frac{1}{EI} \cdot \left[P(l - x') + \omega(x - x') + \frac{1}{2} p\,(l - x')^2 \right]^2 dx'$$

Lo spostamento verticale del punto **C**, cioè l'ordinata della deformata, si ottiene facendo la derivata di L rispetto a ω (ponendo poi ω =0, si ottiene la deformata dovuta ai soli *P* e *p*).

Qualora si voglia lo spostamento verticale dell'estremo libero **B** (*freccia*), non è necessario introdurre alcuna forza ausiliaria perché ivi agisce già una forza concentrata *P*, rappresentata con una lettera particolare.

Si ottiene, considerando una trave di sezionecostante:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI} \int_0^l \left[P(l - x) + \frac{1}{2} p (l - x)^2 \right]^2 dx$$

$$L = \frac{1}{2} \frac{l^3}{EI} \left(\frac{1}{3} p^2 + \frac{1}{4} Ppl + \frac{1}{2} p^2 l^2 \right)$$

La freccia *f* si ottiene facendo la derivata di *L* rispetto a *P*:

$$f = \frac{l^3}{EI}\left(\frac{P}{3} + \frac{pl}{8}\right)$$

Problema 2°

Si abbia una trave incastrata in **A**, appoggiata in **B**, caricata da un carico *p* distribuito per tutta la lunghezza e da una forza concentrata *P* applicata in **C**, a distanza *l'* da **A**.
Si ricerca la reazione iperstatica *R* sull'appogio.

Esprimiamo in funzione di R i momenti rispetto a **C** ed **A** indicandoli con M_0 e M_1.

Castigliano annulla lo spostamento verticale in corrispondenza dell'appoggio, cioè annulla la derivata di *L* rispetto a *R*:

$$\frac{dL}{dR}$$

Si può applicare la regola per la derivata di funzione di funzione ottenendo:

$$\frac{dL}{dR} = \frac{dL}{dM_0}\cdot\frac{dM_0}{dR} + \frac{dL}{dM_1}\cdot\frac{dM_1}{dR}$$

$$\frac{dL}{dR} = \frac{dL}{dM_0}\cdot\frac{dM_0}{dR} + \frac{dL}{dM_1}\cdot\left(\frac{dM_1}{dM_0}\cdot\frac{dM_0}{dR}\right)$$

$$\frac{dL}{dR} = \left(\frac{dL}{dM_0} + \frac{dL}{dM_1}\frac{dM_1}{dM_0}\right)\cdot\frac{dM_0}{dR}$$

Quindi:

$$\frac{dL}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{dL}{dM_0} + \frac{dL}{dM_1}\cdot\frac{dM_1}{dM_0} = 0$$

La soluzione dell'quazione che si ottiene è:

$$R = P\cdot\frac{l'^2\cdot(3l - l')}{2l^3} + \frac{3}{8}pl$$

Problema 3°

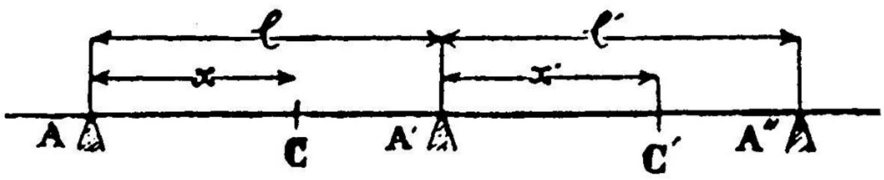
Si abbia una trave incastrata in **A** e in **B**, caricata da un carico *p* distribuito per tutta la lunghezza e da una forza concentrata *P* applicata in **C**, a distanza l' da **A**.

Castigliano risolve il problema annullando le espressioni delle rotazioni nei due estremi della trave, ottenendo:

$$M_A = \frac{P \cdot l' \cdot (l - l')^2}{l^2} + \frac{1}{12} p l^2$$

$$M_B = \frac{P \cdot l'^2 \cdot (l - l')}{l^2} + \frac{1}{12} p l^2$$

6. La trave continua su più appoggi



L'applicazione dei metodi di Castigliano dà modo di riottenere facilmente l'equazione dei tre momenti, *quella data da Clapeyron, di cui forma il più bel titolo d'onore, e che ha fatto grandemente progredire la teoria dei ponti di ferro a travate continue.*
Consideriamo tre appoggi successivi *A, A', A"* e scriviamo le due espressioni delle rotazioni che si avrebbero nel tronco di sinistra e in quello di destra se non vi fosse la continuità in *A'*.

Per ottenere queste rotazioni si devono prendere le derivate del lavoro di deformazione dei due tronchi rispetto al momento nella sezione *A'* (denominato *M'*).
La continuità in A' impone che le due espressioni devono avere lo stesso valore numerico, ma il segno contrario (*in altre parole si annulla la rotazione relativa*) per cui si ha:

$$\frac{dL_{AA'}}{dM'} + \frac{dL_{A'A''}}{dM'} = 0$$

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$Ml + 2M' \cdot (l + l') + M'' \cdot l' - \frac{1}{4} \cdot \left(pl^3 + p' l'^3 \right) = 0$$

Nell'espressione precedente:
- l e p sono lunghezza e peso distibuito sul tronco di sinistra
- l' e p' sono lunghezza e peso distribuito sul tronco di desra.
- *M, M', M"* sono i momenti sugli appoggi *A, A', A"*.

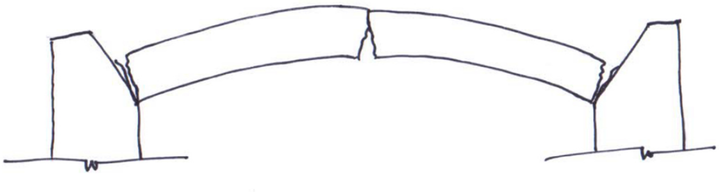
Castigliano osserva che l'equazione ottenuta è *"quella data da Clapeyron, di cui forma il più bel titolo d'onore, e che ha fatto grandemente progredire la teoria dei ponti di ferro a travate continue".*

7. Il calcolo del ponte sul fiume Dora a Torino

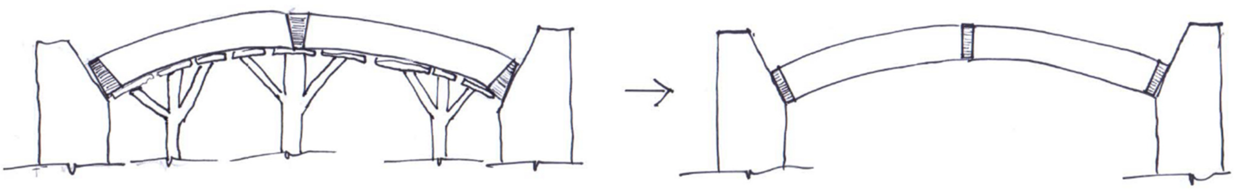
Nelle *Applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici*, Castigliano mostra un'applicazione del metodo per lo studio dell'arco iperstatico esposto nella *Nuova Teoria*.

Si tratta, come già detto, dello studio del ponte sul fiume Dora a Torino, costruito nel triennio 1828-1830 dall'ingegnere Carlo Bernardo Mosca.

Mosca aveva studiato i testi di Perronet e di Boistard che spiegavano come, al disarmo, l'arco si aprisse all'estradosso alle imposte e all'intradosso in chiave.



Egli allora decise di aumentare lo spessore dei giunti nelle zone di imposta all'intradosso e nella zona di chiave all'estradosso (per aumentare lo spessore della malta là dove si concentrava la compressione) così da ottenenere, dopo il disarmo, uno spessore finale costante dei giunti.



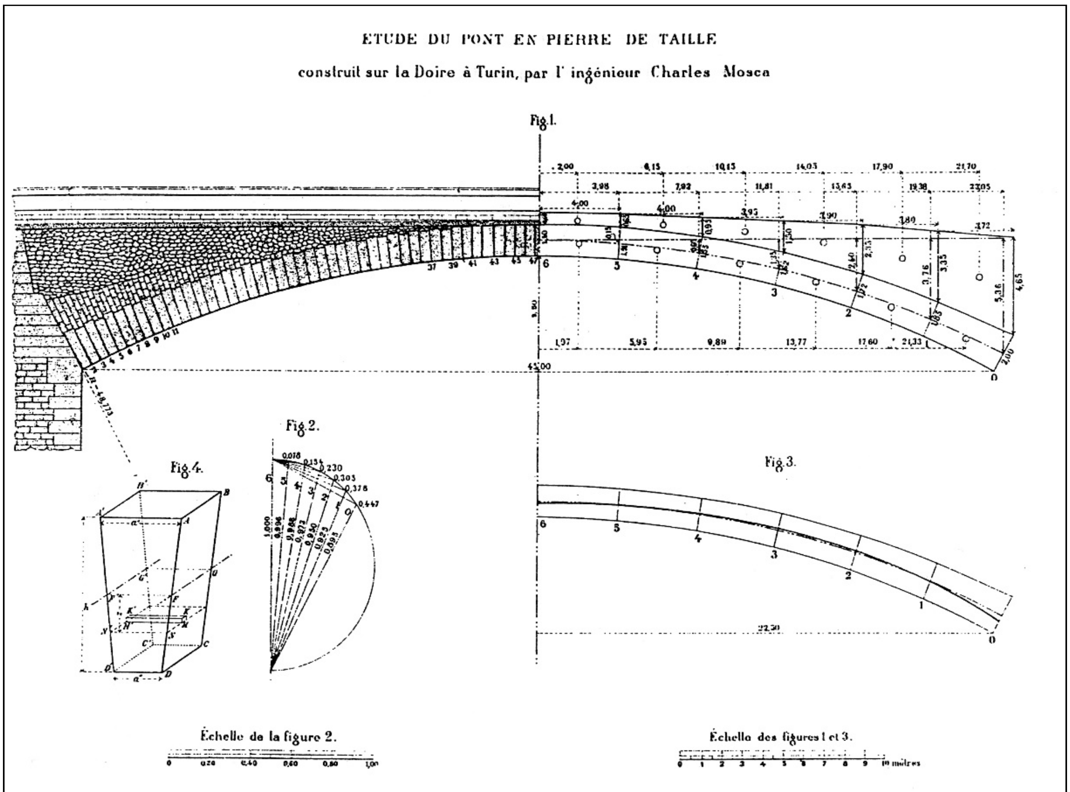
Per avere questa possibilità, egli fece una centina che in chiave era più alta di 25 cm rispetto al disegno previsto per l'arco (la differenza tra lo sviluppo era di 16 cm: è questa differenza che permette giunti con spessore non costante).
Al disarmo l'arco si abbassò di 12,5 cm e si osservò il previsto parallelismo tra i giunti.
Quindi Mosca adottò un taglio di grande precisione dei conci di pietra, limitando la presenza dei giunti in malta alle imposte e in chiave, ove era previsto un divaricamento dei giunti.

Nel calcolo del lavoro di deformazione Castigliano considera la diversa deformabilità della pietra e della malta interposta (cioè egli *non* considera il modulo elastico della muratura di pietra nel suo insieme).
Egli imposta il calcolo in modo da ottenere la distribuzione delle tensioni che risultano se si escludono le porzioni di sezione che entrano in *tensione* (trazione) e, pertanto può essere considerato un pioniere dell'analisi non lineare.

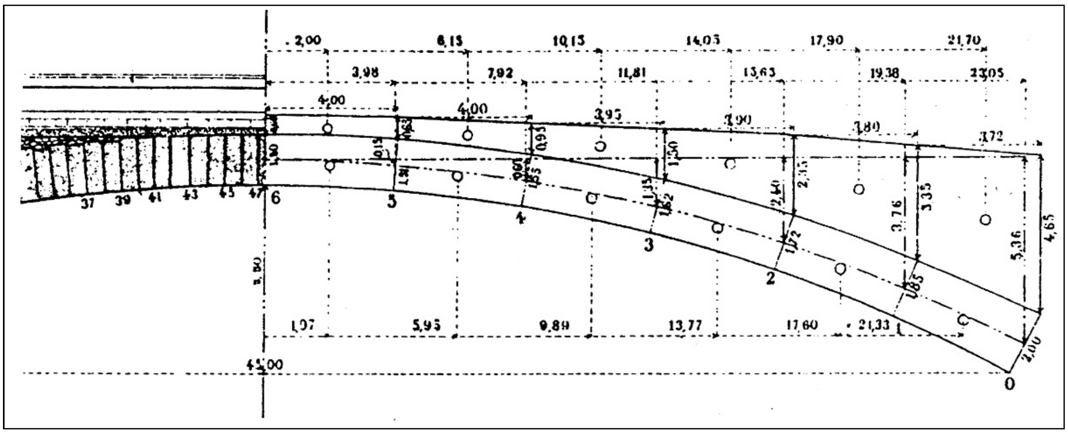
Egli dapprima chiarisce che *incastro*, in una costruzione in muratura non resistente alla trazione, significa possibilità di appoggio lungo tutta l'altezza computata nel calcolo strutturale.

Un arco in muratura deve essere sempre riguardato come incastrato alle estremità, giacché è chiaro che se esso è posto in buone condizioni di resistenza, come si deve sempre supporre in un primo calcolo, deve premere sulle spalle con tutta l'ampiezza delle sue facce di posa, ossia delle imposte.
Se poi a calcolo finito risulterà che, supponendo l'incastro, vi sarebbe tensione (trazione) in qualche punto dei giunti d'imposta, e se tale tensione non può aver luogo o per mancanza di cemento, o perché non si possa contare sulla resistenza del cemento alla tensione, bisognerà riprendere il calcolo supponendo ridotte le altezze dei giunti a quelle sole parti che dal primo calcolo son risultate premute.
Queste altezze si potranno ancora correggere in un terzo calcolo e così di seguito.

Il ponte ha una luce - corda dell'intradosso - di 45 m e una *saetta* (misurata all'intradosso) di 5,5 m.



Lo spessore dell'arco - che rappresenta una striscia di volta di larghezza unitaria è - 1,50 m in chiave e 2,01 m alle imposte.
L'arco è in granito (2750 Kg/mc): i pesi dei rinfianchi, in muratura di pietrame, degli strati permanenti per la costruzione del piano viario e del sovraccarico accidentale sono tutti omogeneizzati secondo il peso del granito.
Castigliano divide l'asse della semivolta in sei parti uguali.



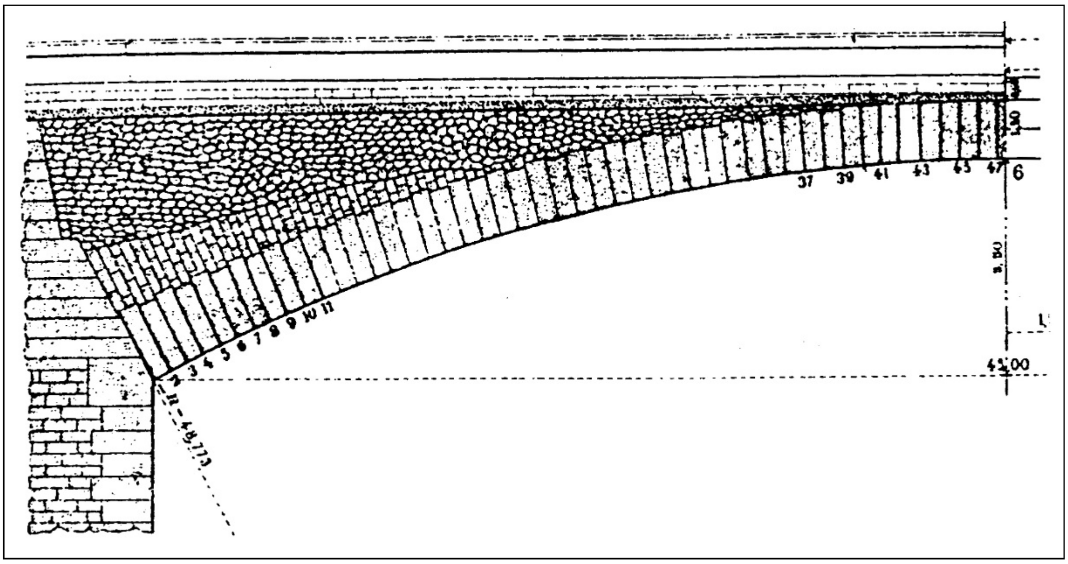
La simmetria del carico suggerisce di considerare la sezione di chiave, nella quale la forza di taglio è nulla, e di adottare quali incognite iperstatiche:
- *M*, momento flettente in chiave;
- *Q*, azione assiale in chiave, pari alla spinta all'imposta.

Castigliano può allora calcolare la tabella riportata nella figura seguente nella quale, in ogni sezione da 0 a 6, appaiono i momenti flettenti, le azioni assiali e le forze di taglio in funzione delle incognite M e P.

Sezioni 1	Momenti di flessione 2	Pressioni normali 3	Sforzi di taglio 4
0	$M_0 = M - 5{,}36 \, . \, Q + 2021937$	$P_0 = 0{,}895 \, . \, Q + 102217$	$S_0 = 0{,}447 \, Q - 204655$
1	$M_1 = M - 3{,}76 \, . \, Q + 1318295$	$P_1 = 0{,}925 \, . \, Q + 63085$	$S_1 = 0{,}378 \, Q - 154385$
2	$M_2 = M - 2{,}40 \, . \, Q + 800470$	$P_2 = 0{,}950 \, . \, Q + 35915$	$S_2 = 0{,}305 \, Q - 111897$
3	$M_3 = M - 1{,}35 \, . \, Q + 429935$	$P_3 = 0{,}973 \, . \, Q + 18177$	$S_3 = 0{,}230 \, Q - 76890$
4	$M_4 = M - 0{,}60 \, . \, Q + 185955$	$P_4 = 0{,}988 \, . \, Q + 7480$	$S_4 = 0{,}154 \, Q - 47987$
5	$M_5 = M - 0{,}15 \, . \, Q + 46392$	$P_5 = 0{,}996 \, . \, Q + 1815$	$S_5 = 0{,}078 \, Q - 22962$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1{,}000 \, . \, Q$	$S_6 = 0$

Come già ricordato, il costruttore Mosca aveva interposto malta tra i conci alle imposte ed in prossimità della chiave, adottando una speciale disposizione.
I cunei di malta nei giunti sono:
- alle imposte, più larghi all'intradosso che all'estradosso
- in chiave, più larghi all'estradosso che all'intradosso.

Castigliano intende dimostrare che questa disposizione dei giunti di malta permette di ottenere una buona distribuzione delle pressioni.
In altre parole – tramite la potenza di calcolo del suo teorema - intende dare *giustificazione analitica* del fatto che, grazie alla deformabilità della malta, la linea delle pressioni risulta più “centrata” rispetto a quella che si sarebbe ottenuta in un ponte costrutio interamente con muratura di conci posati a secco.



Per semplicità concentra i giunti di malta in tre soli elementi, due alle imposte e uno in chiave. Suppone inoltre un rapporto tra il modulo elastico del granito e quello della malta, al momento del disarmo, pari a 100.

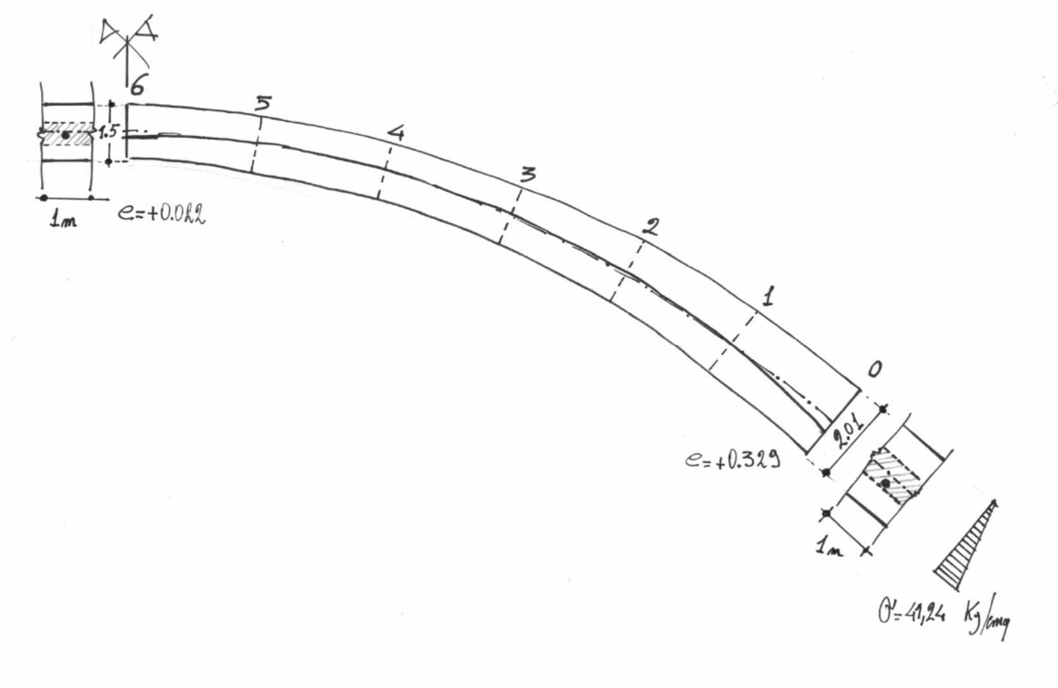
Castigliano esprime il lavoro di deformazione - trascurando lo scorrimento dovuto al taglio - in funzione delle incognite iperstatiche *M* e *Q*.
Eguagliando a zero le derivate rispetto alle incognite (cioè esprimendo l'assenza dei movimenti relativi, ovvero ricercando il minimo del funzionale secondo il principio del generale Menabrea) si ottiene il sistema risolvente, in due equazioni in due incognite:

$$Q = 352990$$
$$M = 7690$$

Nelle varie sezioni sono calcolati momenti flettenti, azioni assiali, forze di taglio, eccentricità della linea delle pressioni, tensioni all'intradosso e all'estradosso.

Sezioni 1	Momenti di flessione 2	Pressioni normali 3	Sforzi di taglio 4	Curva delle pressioni 5	Pressioni per m. q. all'intradosso 6	Pressioni per m. q. all'estradosso 7
0	+ 137627	418137	− 46865	+ 0,329	412425	3635
1	− 1315	380595	− 20955	− 0,003	212905	208305
2	− 38090	371245	− 4237	− 0,105	294915	136765
3	− 38895	361627	+ 4296	− 0,108	312155	134305
4	− 18145	356230	+ 6372	− 0,051	275146	184514
5	+ 1135	353385	+ 4571	+ 0,003	237011	231045
6	+ 7690	352990	0	+ 0,022	255997	214993

La curva delle pressioni, considerando la deformabilità della malta, è ovunque contenuta nel terzo medio dell'arco: in particolare alle imposte (sezione 0) passa al di sotto del centro della sezione ad una distanza pari a m 0,329, appena inferiore alla sesta parte dell'altezza della sezione (2,01/6 = 0,335 m); ivi la pressione è **41,24** Kg/cmq (vedi tavola precedente).



Linea delle pressioni nel ponte come realmente costruito

Castigliano nota che la pressione è eccessiva per le malte dopo che esse hanno già fatto presa.

Ma se il disarmo ha luogo prima che le malte abbiano fatto buona presa , esse si comprimono bensì maggiormente, ma i grani di sabbia, che la compongono, non possono cadere, perché tenuti insieme dalla calce non ancora indurita.
*In questo caso **la presa delle malte si fa sotto la pressione stessa che esse devono poscia sopportare**, ed è quindi evidente che dopo la presa lo schiacciamento non può più aver luogo.*

8. L'analisi *non lineare* iterativa

Castigliano esegue un “calcolo di confronto” supponendo che nei giunti non fosse stata interposta alcuna malta.

Ottiene i seguenti valori:

$$Q = 324710$$
$$M = -21800$$

Mentre il valore di Q (azione assiale in chiave, pari alla spinta orizzontale all'imposta) è confrontabile con quello ricavato in precedenza, M (momento flettente in chiave) è di segno opposto: la maggior deformabilità della malta ha quindi grande influenza sul regime tensionale dell'arco.

Presso le imposte la curva delle pressioni fuoriesce dal terzo medio e l'arco si apre verso l'estradosso perché incapace di resitere a trazione: l'altezza della parte compressa (resistente) è pari a 1,5 m e quindi inferiore all'altezza geometrica della sezione (2,01 m) considerata nel calcolo.

Nelle altre sezioni l'altezza *apparente* (quella geometrica) è uguale a quella *resistente*.

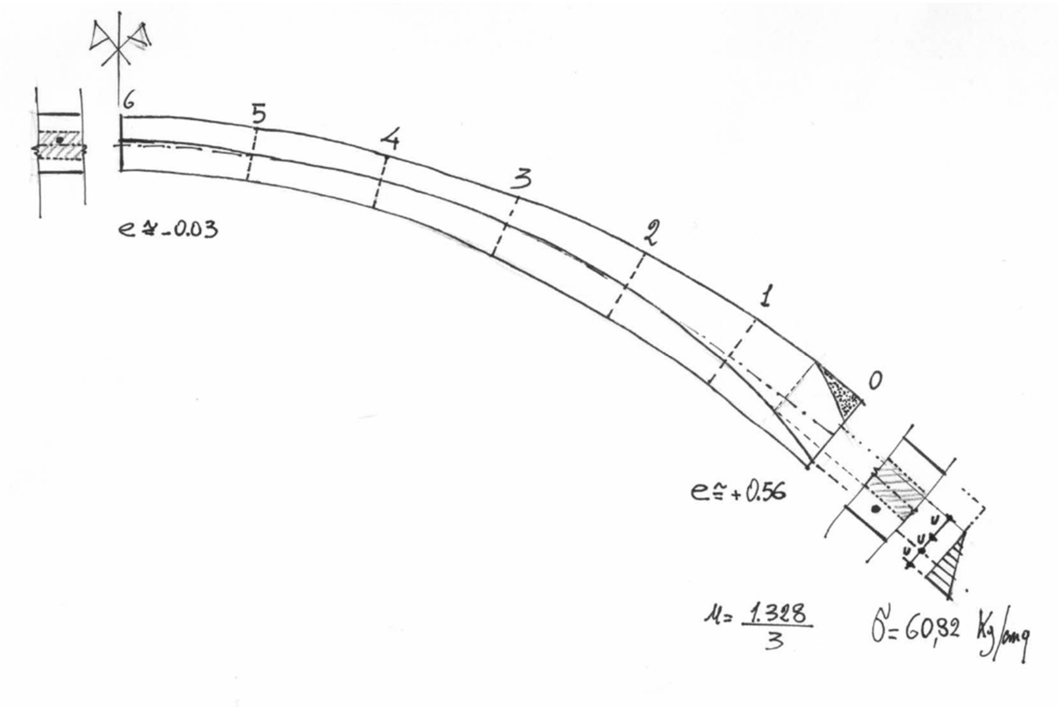
Castigliano reimposta il calcolo aggiornando nella sezione d'imposta la posizione dell'asse, che deve passare per il baricentro della sezione resistente.

Il nuovo calcolo dà una spinta di **333.960** Kg e un altezza compressa pari a 1,37 m (cui corrisponde un'altezza della parte tesa pari a 2,01-1,37 = 0,64m).

Senza rifare un terzo calcolo, Castigliano ricava approssimativamente un terzo valore con una proporzione basata sui risultati ricavati nei primi due calcoli ed ottiene per la parte compressa un valore di **1,328** m.

Il massimo valore di compressione all'imposta (calcolato nell'ipotesi di mantenere – in quanto sufficientemente preciso - il valore dell'azione assiale della seconda approssimazione) risulta **60,82** Kg/cmq, vale a dire il 50 % superiore a quello ottenuto precedentemente, considerando la maggior deformabilità della malta interposta tra i conci di pietra.

Nella figura seguente è stata evidenziata, all'imposta, la zona che risulterebbe tesa.



Linea delle pressioni nel ponte in assenza di malta tra i conci di pietra

9. Persistente attualità del procedimento di Castigliano

Il procedimento di Castigliano consiste, come visto, in una serie di soluzioni elastiche lineari condotte aggiornando di volta in volta altezza della sezione resistente (tenendo conto della parzializzazione) e la geometria della linea d'asse.
Chiariamo che lo studio di un arco in materiale non resistente a trazione *non* può, generalmente, essere eseguito con i più usuali programmi ad elementi finiti che operano in analisi non lineare, aggiornando ad ogni passo la matrice di rigidezza.
Infatti essi, pur formulati per tener conto della variazione di geometria derivante dalla deformazione elastica (cosidetta non linearità geometrica), non considerano generalmente la variazione di geometria conseguente alla parzializzazione delle sezioni.
Invece, nel caso di strutture ad arco la forma della linea d'asse è determinante trattandosi di una struttura *resistente per forma*.

Un procedimento originale - da noi recentemente formulato - è fondato sulla ripetuta costruzione delle linee delle pressioni, investigando su ciascuna di esse, al fine di minimizzare il seguente funzionale:

$$\min\left\{\frac{1}{2E}\cdot\int_{\Gamma}\int_{\Omega}\sigma^{2}d\Omega ds\right.$$
$$\sigma \geq 0, \sigma \in \Sigma$$

Il funzionale è calcolato integrando, lungo la linea d'asse Γ, il quadrato delle tensioni σ *sulle sole parti compresse* delle sezioni Ω.
Per la linearità della legge costitutiva del materiale, il funzionale da ottimizzare coincide con l'energia di deformazione elastica calcolata, in corrispondenza di ogni possibile soluzione equilibrata (il cui insieme è stato simbolicamente rappresentato con Σ), *sulle sole parti compresse*.

La costruzione della linea delle pressioni è fondata su una metodologia - da noi precedentemente individuata - che ne consente il tracciamento automatico, anche nel caso di forze comunque inclinate.