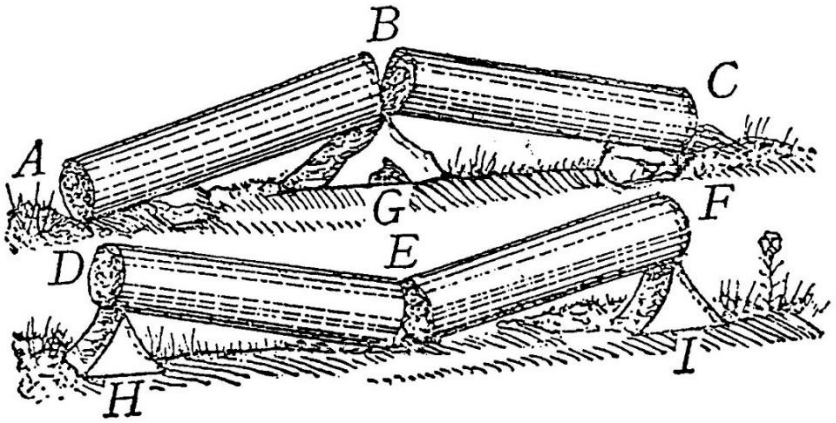
GALILEO E LA *NUOVA SCIENZA* DELLA RESISTENZA DEI MATERIALI

Estratto (con aggiunte chiarificatrici) da:
Giuseppe Stagnitto, *MECCANICA E STRUTTURE DA ARCHIMEDE A CASTIGLIANO. Evoluzione Storica della Meccanica Teorica ed Applicata all'Analisi delle Strutture*, Università degli Studi di Pavia, Dipartimento di Meccanica Strutturale, RS-05/99.

1. Galileo, riferimento principe del profilo storico
2. La meccanica teorica ed applicata prima di Galileo
3. Galileo e l'armonia nascosta "più potente della manifesta" (Eraclito)
4. Vita e opere principali di Galileo (sintesi)
5. La legge dell'equilibrio della leva e del piano inclinato
6. La legge di conservazione del lavoro
7. La cinematica del moto uniformemente accelerato
8. Il principio di relatività galileiano
9. I *Discorsi*: la legge di caduta dei gravi
10. Il *metodo* scientifico: *difalcare gli impedimenti della materia*
11. La prima delle *due nuove scienze* dei *Discorsi*
12. La prima giornata dei *Discorsi*
13. La seconda giornata dei *Discorsi*
14. Le prime cinque proposizioni
15. Il problema fondamentale
16. L'ottimizzazione strutturale
17. Osservazione critica finale

> *Conosciuta la resistenza di un picciol chiodo o di una piccola caviglia di legno, io potrò dimostrativamente sapere le resistenze di tutti i chiodi, di tutti i pali, di tutte le catene di ferro, di tutte le travi.*
>
> (Ed. Naz. Opere 1968 XVI, p. 221)



1. Galileo, riferimento principe del profilo storico

Tra i nomi degli studiosi della meccanica *giganteggia* quello di Galileo che è ritenuto unanimamente il fondatore della scienza moderna.
A Galileo si deve fare spesso riferimento: possiamo quasi dire che è legittima una lettura degli autori precedenti in funzione della sua riflessione, così come potrebbe essere conveniente introdurre lo studio degli autori successivi in virtù delle loro migliorie ai modelli galileiani.

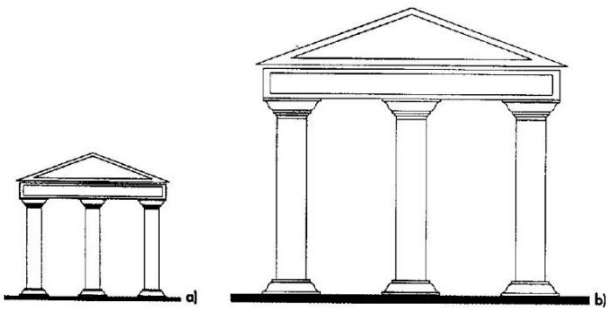
La Scienza delle Costruzioni inizia dunque con Galileo: a lui è dovuto il concetto stesso di schematizzazione dell'*azione resistente* di una struttura; i successori affineranno il modello, ma si muoveranno sempre nel solco tracciato da Galileo.
Questa radicale semplificazione del problema meccanico reale è l'applicazione del concetto di *esperimento ideale*: il modello deve divenire il più scarno, essenziale possibile: nel moto dei gravi, ad esempio, l'aria costituisce solo un ostacolo, il cui effetto deve essere, in prima approssimazione, *trascurato*. Come noto, la scienza moderna accoglierà infatti le indicazioni di Galileo, in esatta antitesi del procedimento teorizzato da Francesco Bacone (considerato, comunque, uno dei padri della scienza sperimentale) che prescriveva la raccolta ed il confronto di *tutti* i possibili fenomeni legati all'oggetto dello studio, nella fiducia che solo dall'esame completo di essi scaturisse la conoscenza della legge della natura.
Le leggi dell'Universo sono scritte in lingua matematica: a questa "riscoperta rinascimentale" (di cui l'opera di Galileo rappresenta il frutto maturo) del valore interpretativo della matematica aveva aperto la strada la riflessione del medioevo. Infatti, nel medioevo, la geometria era stata utilizzata per risolvere sia problemi statici (Nemorario) sia problemi cinematici (Nicola D'Oresme, vedi punto 7).

2. La meccanica teorica ed applicata prima di Galileo

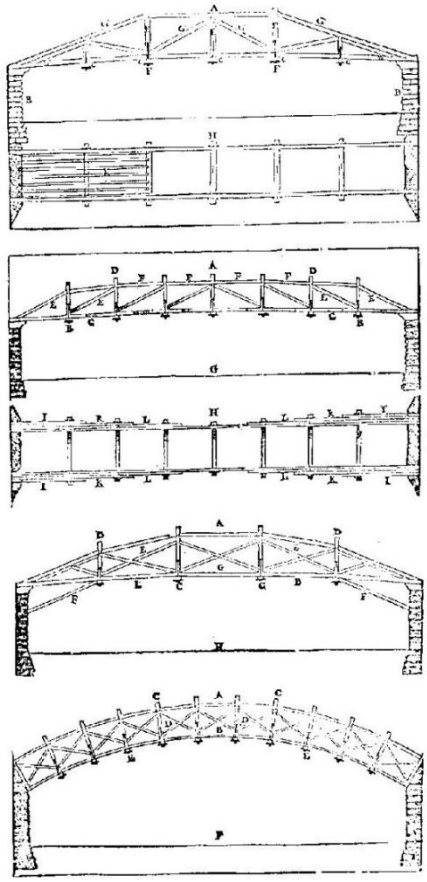
Diciamo, in estrema sintesi, che i risultati degli antichi nel campo della statica sono sostanzialmente corretti, quelli della dinamica errati.
Nell'antichità, la statica fu affrontata seguendo una duplice via.
Dalla scuola aristotelica derivava un primo procedimento che nasconde, in nuce, il principio dei lavori virtuali: l'*equilibrio statico è visto come il risultato di un movimento che non può realizzarsi*.

> "L'idea base del principio dei lavori virtuali (due pesi sono in equilibrio se, nel moto possibile, il loro rapporto è inverso a quello delle velocità) è di considerare l'equilibrio come un caso limite del moto e quest'idea poteva nascere solo nella mente di un filosofo dell'antica Grecia."
>
> Danilo Capecchi, *Il principio dei lavori virtuali da Aristotele a Bernoulli*, 1999, pag.1

Invece, Archimede (dirà Galileo di aver provato, studiando Archimede, un *infinito stupore*) cercò di fondare la statica con un secondo differente procedimento, ancorandola alla sola geometria: di derivazione platonica è questa sua pretesa di dedurre le leggi generali dell'equilibrio con un discorso fondato sulla sola logica, partendo da situazioni assunte equilibrate in quanto simmetriche (punto 5).
Per quanto riguarda la meccanica applicata, gli antichi teorici delle costruzioni, secondo quanto riferisce Vitruvio, seguivano precetti fondati su leggi generali di armonia e che pertanto erano insensibili al cambiamento di scala (vedi la successiva figura simbolica).



Tuttavia erano noti alcuni limiti nel possibile utilizzo del materiale: Vitruvio pone un limite, sia pur espresso in proporzione del modulo, alla massima lunghezza dell'architrave monolitica in pietra e, negli ultimi libri del suo trattato, afferma esplicitamente che le leggi delle proporzioni non sono rispettate nei modelli delle macchine belliche.
Nel corso dei secoli, tuttavia, il concetto che *le ragioni della meccanica hanno i fondamenti loro nella geometria* aveva sempre più assunto un valore indiscutibile.
Ad esempio Palladio, nel terzo dei Quattro libri dell'Architettura (1570), nel presentare quattro schemi di ponti reticolari, due a maglia triangolare e due a maglia quadrangolare con doppia diagonale di controventatura (vedi figura successiva) scrive: *i ponti di queste quattro maniere si potranno far lunghi quanto richiederà il bisogno,* ***facendo maggiori tutte le parti loro a proporzione***.



NOTA: se il peso proprio è trascurabile rispetto ai carichi portati, considerando i primi due schemi, l'affermazione del Palladio non è del tutto irragionevole (vedi cap. 6 del libro G. Stagnitto, Evoluzione scientifica e costruzioni, Pavia, 2005).

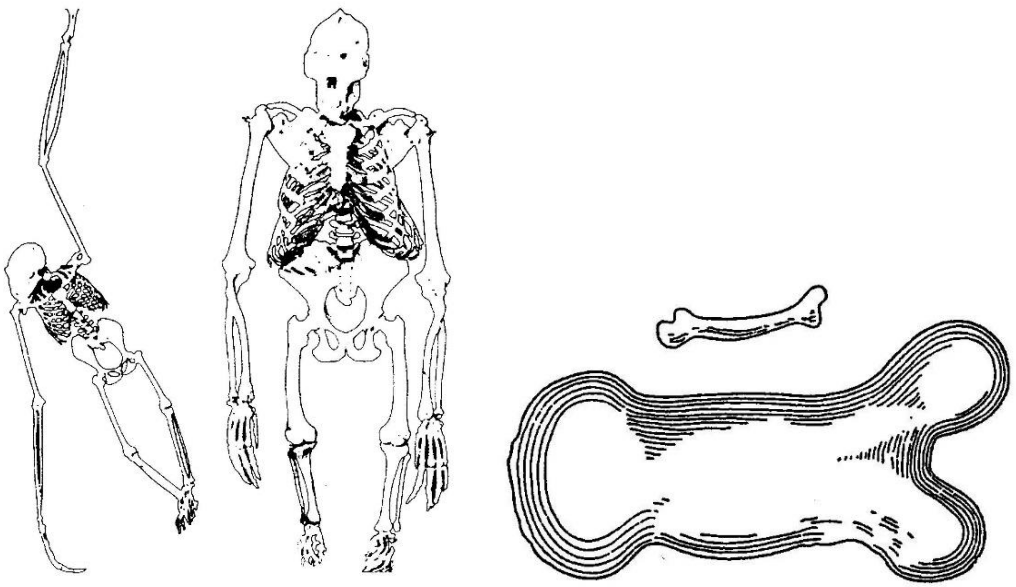
3. Galileo e l'*armonia nascosta* "più potente della manifesta" (Eraclito)

Galileo - nel brivido intellettuale di chi ha riscoperto (dopo duemila anni dalla prima intuizione di Pitagora) che l'Universo intero, compreso il mondo sub-lunare (vedi punto 10), è scritto in lingua matematica, in quanto anche il movimento dei corpi terrestri segue la legge del numero - affronta l'antico tema della stabilità delle costruzioni.

All'origine di entrambe le *nuove scienze* (la dinamica e la scienza dei materiali resistenti) vi è la scoperta di un'armonia nascosta che sfugge ad ogni indagine, sia essa condotta con la logica di Aristotele o con la sperimentazione dei pratici.
Per cogliere questa "armonia nascosta" si dovrà elaborare un metodo "nuovo" alla cui definizione Galileo dedicherà il massimo sforzo intellettuale (punto 10): il suo poderoso pensiero reca ancora – come in filigrana – le tracce della lotta titanica per affrancarsi dal passato (punto 17).
Nel moto dei gravi la legge è matematicamente semplice ma sempre sfuggita anche ai più sagaci osservatori: la proporzionalità non è tra lo spazio e il tempo ma tra lo spazio e il quadrato del tempo trascorso nella caduta.
Nella resistenza dei materiali il solo rapporto di similitudine geometrica non può dar ragione dei fenomeni di resistenza osservati: interviene il cosiddetto rapporto *sesquialtero* che giustifica perché *le invenzioni delle macchine in piccolo, in grande poi non sussistono*.

> NOTA: "sesquialtero" è parola latina che significa "una volta e mezzo". Se aumentiamo tutte le dimensioni di una costruzione per la quale è predominante il peso proprio, le forze agenti saranno proporzionali al cubo delle lunghezze, mentre le forze resistenti saranno proporzionali al quadrato delle lunghezze: sesquialtero è il rapporto (3/2) degli esponenti [ovviamente il discorso strutturale è più complesso, come sappiamo dalla teoria moderna].

Galileo vuol sorprendere il lettore: anche la figura umana (il prototipo di ogni proporzione e quindi della stessa armonia architettonica, secondo la teoria estetica di Vitruvio che aveva inserito il corpo umano in una figura geometrica ideale, come riprodotta nel famoso disegno che compare nei manoscritti leonardeschi) se volesse, aumentando di dimensioni, conservare la stessa resistenza delle sue membre dovrebbe deformarsi grottescamente, come il gigante descritto dall'Ariosto (punto 15).



Galileo era consapevole della portata pratica delle sue teorie.

Già nel 1635 il testo dei *Discorsi* girava in copie manoscritte.
In una lettera ad Antonio De Ville, nel marzo 1635, Galileo scrive:

> *Un ponte sia potente a sostenere 1000 libbre. Cercasi ora se un altro ponte del medesimo legname, ma in tutti i suoi membri accresciuto in quadrupla proporzione sarà potente a reggere il peso di 4000 libbre*
> *Dove io dico di no; e talmente dico di no che potrebbe anco accadere che anche il solo peso proprio lo fiaccasse.*
>
> (Ed. Naz. Opere 1968 XVI, p. 221)

La frase di Galileo, così chiaramente opposta alle indicazioni del Palladio sulla costruzione dei ponti, ci sembra che voglia esserne l'esplicita critica.
Del resto il trattato del Palladio è uno dei due soli libri, dedicati alle costruzioni, trovati dal Favaro nella bibioteca di Galileo (l'altro è il testo di Domenico Fontana sulla traslazione e l'erezione dell'obelisco vaticano in Piazza San pietro a Roma).
In quest'altra frase è ancora più esplicita la consapevolezza di avere fondato la scienza necessaria alle applicazioni concrete delle costruzioni:

> *Conosciuta la resistenza di un picciol chiodo o di una piccola caviglia di legno, io potrò dimostrativamente sapere le resistenze di tutti i chiodi, di tutti i pali, di tutte le catene di ferro, di tutte le travi.*
>
> (Ed. Naz. Opere 1968 XVI, p. 221)

4. Vita e opere principali di Galileo (sintesi)

> Non può intender le leggi dell'Universo *se prima non si impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua mtematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intendere umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.*

Galileo Galilei nacque a Pisa nel 1564.
Suo padre, mercante di stoffe, era pure matematico e teorico della musica (un suo libro sull'armonia musicale costituì una della letture di Keplero).
Galileo attirò l'attenzione del marchese Guidobaldo Del Monte e con il suo aiuto, a soli 25 anni, ebbe la cattedra di matematica a Pisa.
Grazie allo stesso protettore, nel 1592, ottenne la cattedra di matematica a Padova.
Compone nel 1593 *Le meccaniche*, che Mersenne farà poi pubblicare per la prima volta a Parigi nel 1634.
Nel 1610 Galileo pubblica il *Sidereus Nuncius*, che contiene la descrizione delle macchie solari, dei monti sulla luna, delle fasi di Venere, e la relazione sulla scoperta delle lune di Giove.Lo stesso anno, per la fama acquistata, Galileo si trasferì a Firenze, come primo matematico del Granduca di Toscana.

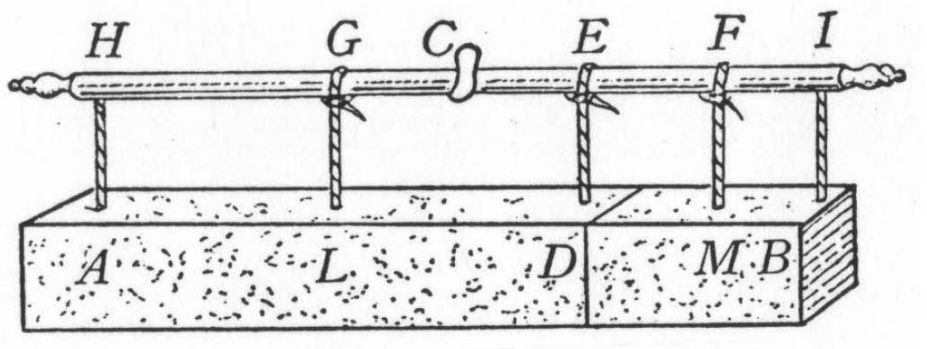
Nel 1632 pubblicò il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano*. Nel 1633 Galileo fu costretto ad abiurare delle opinioni espresse e fu condannato agli arresti domiciliari ad Arcetri, con divieto di pubblicare altre opere.
Egli lavorò al suo capolavoro, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (le due *nuove scienze* erano la resistenza dei materiali e la dinamica).
Il libro fu pubblicato a Leida nel 1638, per il divieto di pubblicare in tutti i paesi cattolici.
Galileo morì nel 1642.

Galileo ha dato indicazione della frase che, omaggiando Platone voleva riassumesse l'intera sua ricerca scientifica:

> Da porsi nel titolo del libro di tutte l'opere: *Di qui si comprenderà in infiniti esempli qual sia l'utilità delle matematiche in concludere circa alle proposizioni naturali e quanto sia* ***impossibile il poter ben filosofare senza la scorta della geometria****, conforme al vero pronunciato di* ***Platone*** *(G.G., VIII, 613-614).*

5. La legge dell'equilibrio della leva e del piano inclinato

L'opera *Le mecaniche* (1593) fu pubblicata per la prima volta in francese dal padre Mersenne nel 1634, e nel 1694 in italiano.

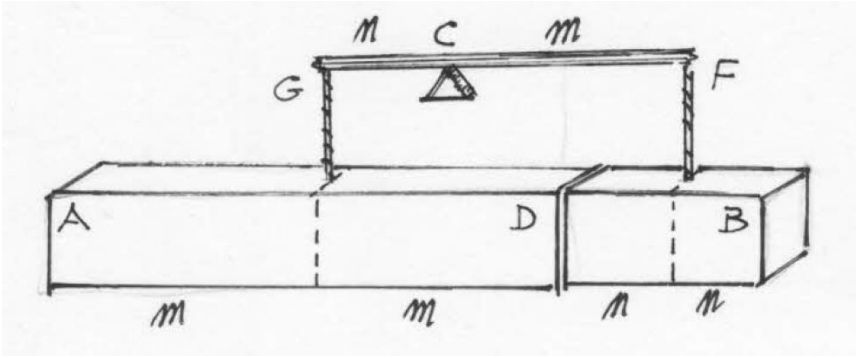


Nel trattato, seguendo la via geometrica di Archimede, Galileo dà una dimostrazione della leva - che riprenderà nei *Discorsi* - analoga a quella di Stevino e a quella che darà Lagrange nella Sezione Prima della *Mécanique Analytique*.
Immagina di sospendere un solido prismatico omogeneo AB nei suoi due estremi ad un asta incernierata in C.
Poi considera che un taglio operato in D non pregiudicherà l'equilibrio se si aggiungono i legami ED che sostengono i due tronchi di diversa lunghezza AD e DB [nella figura originale sopra riportata manca il disegno della fune di sospensione appena a destra della sezione D].

L'equilibrio è pure salvo se i due tronchi sono invece appesi per il loro centro in G e in F.

Si vede immediatamente che le due distanze dal punto di sospensione GC e CF sono inversamente proporzionali alle lunghezze dei due tronchi.
Risulta infatti, come esplicita la figura successiva:

$$GC = \frac{DB}{2} \quad \text{e} \quad CF = \frac{AD}{2}$$



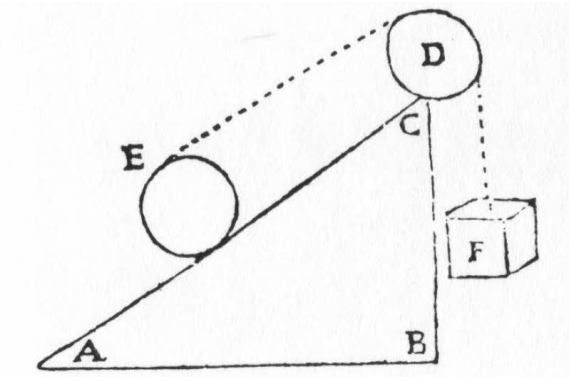
Qualunque sia il taglio operato, si verifica che i due pesi sono inversamente proporzionali alle rispettive distanze dai baricentri.
Galileo deduce che questa "contraria proporzione" è la legge generale dell'equilibrio:

> *Altro non è sospendere pesi disuguali da distanze di contraria proporzione, che pesi uguali da distanze eguali.*

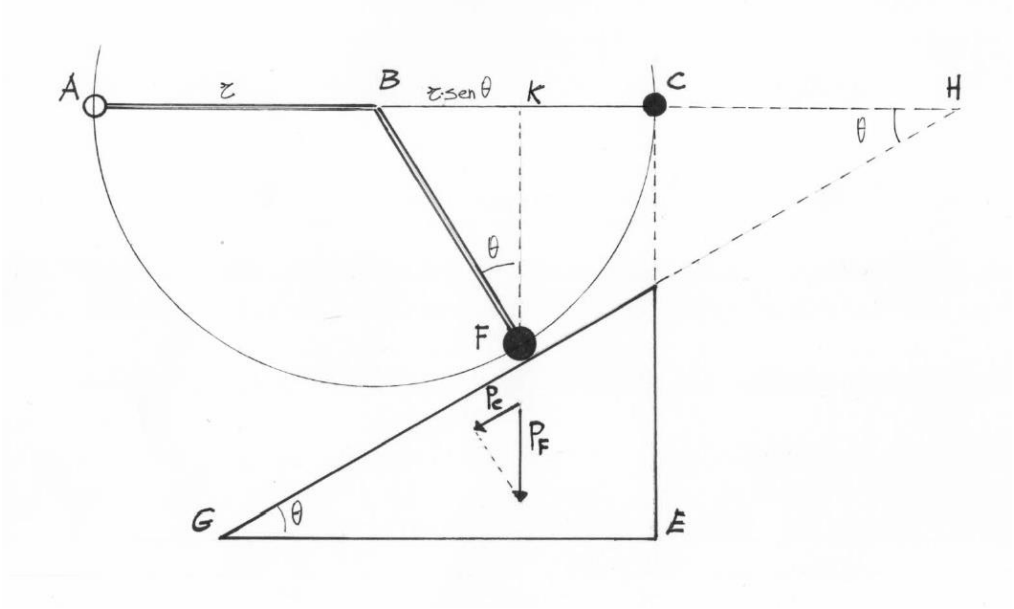
Nell'equilibrio per simmetria cogliamo infinite verifiche dell'invarianza, a destra e a sinistra del punto di sospensione, del prodotto $2mn$.

Nello stesso trattato Galileo riconduce tutte le macchine semplici alla leva. Mostriamo il procedimento ingegnoso utilizzato per il piano inclinato, riconducendo l'equilibrio traslazionale ad un equilibrio rotazionale.

Consideriamo la figura (originale) seguente: il problema dell'equilibrio su un piano inclinato, tradotto in termini moderni, si risolve ricavando la componente della forza peso E, lungo la direzione del piano inclinato (la componente normale al piano è la reazione vincolare che non compie lavoro). Trascurando gli attriti, si ha equilibrio quando questa componente eguaglia rigorosamente il valore del contrappeso F collegato al peso E tramite una fune [che dovrebbe essere collegata al baricentro di E] ed una carrucola.



Nella dimostrazione di Galileo è chiarito che non è essenziale che il peso giaccia effettivamente su un piano inclinato, ma che il suo *primo movimento* sia sempre come quello consentito dal vincolo.
Il peso può allora essere immaginato sospeso ad un'asta incernierata, essendo determinante solo lo spostamento infinitesimo: nella figura seguente (che semplifica quella originale di Galileo) il primo moto del peso in F segue la linea del piano inclinato coincidente con la tangente al cerchio.



Galileo considera due pesi uguali $\mathbf{P_C}$ e $\mathbf{P_A}$. Essi si fanno equilibrio perché la leva, con fulcro in B, ha bracci uguali. Consideriamo un altro peso $\mathbf{P_F}$.
La leva angolare ABF è in equilibrio se:

$$\mathbf{P_F} / \mathbf{P_A} = BA / BK$$

Dalla similitudine dei triangoli e dall'uguaglianza di $\mathbf{P_A}$ e $\mathbf{P_C}$ segue che:

$$\mathbf{P_F} / \mathbf{P_C} = FH / FK$$

Galileo osserva che $\mathbf{P_F}$ può essere considerato come un peso costretto a muoversi lungo la circonferenza di raggio BF (lo spostamento infinitesimo coincide infatti con quello lungo la tangente al cerchio in F).

> *nel primo punto di tale suo moto è come se fosse nel piano elevato secondo la contingente linea GFH, perciò che l'inclinazione della circonferenza nel punto F non differisce dall'inclinazione della contingente FG.*

Se allora $\mathbf{P_F}$ è come giacente sul piano HF, $\mathbf{P_C}$ è come fosse vincolato al piano CE.

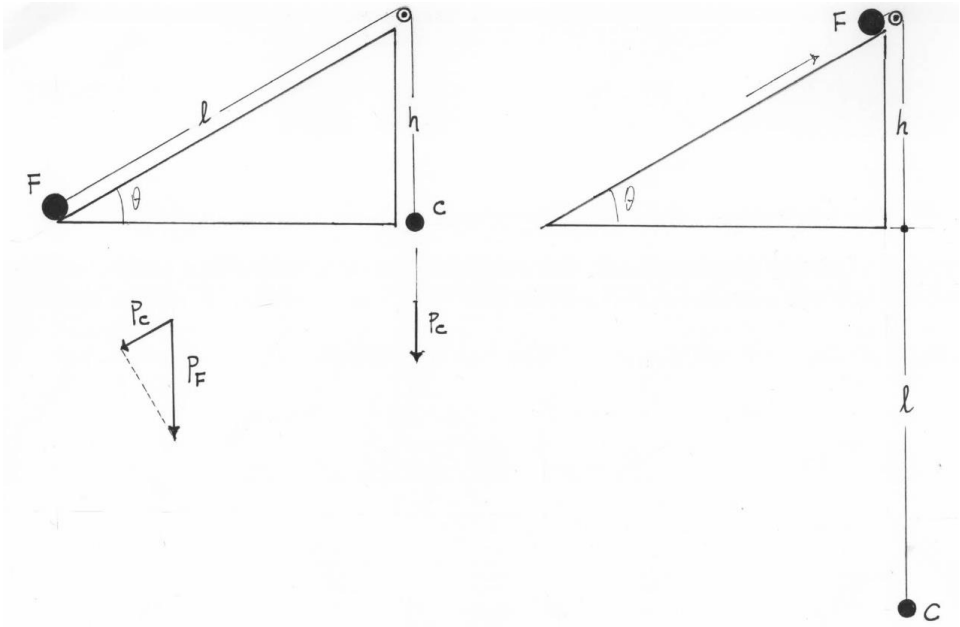
Galileo ha pertanto ricavato la relazione delle forze lungo il piano inclinato, che può essere ritrascritta in forma moderna:

$$\mathbf{P_F} / \mathbf{P_C} = \mathrm{FH} / (\mathrm{FH} \,.\, sen\, \vartheta)$$

$$\mathbf{P_C} = \mathbf{P_F} \,.\, sen\, \vartheta$$

> *sopra il piano elevato la forza al peso ha la medesima proporzione, che la perpendicolare del termine del piano tirata all'orizzonte alla lunghezza d'esso piano.*

Infatti, per definizione, il valore di $sen\, \vartheta$ è il rapporto tra h ed l (vedi figura seguente).



Galileo osserva anche che, mentre il peso $\mathbf{P_F}$ sale di h, il contrappeso $\mathbf{P_C}$ scende di l [nel piano inclinato, per la costanza della tangente, l'uguaglianza dei lavori è verificata per spostamenti finiti e non solo per spostamenti infinitesimi].
La relazione di equilibrio appena ricavata può allora anche essere scritta come uguaglianza dei prodotti delle forze per gli spostamenti verticali dei rispettivi punti di applicazione:

$$\frac{\mathbf{P_C}}{\mathbf{P_F}} = sen\, \vartheta = \frac{h}{l} \;\rightarrow\; \mathbf{P_C} \cdot\, l = \mathbf{P_F} \cdot h$$

NOTA: osserviamo come l'equazione precedente esprima contemporaneamente l'uguaglianza dei lavori (se consideriamo il contrappeso P_c) e la legge di composizione vettoriale (se consideriamo la componente P_c nella direzione del piano inclinato).

L'antica proporzione inversa tra pesi e lunghezze percorse è riletta come affermazione di un invariante: il lavoro. Il piccolo (il peso $\mathbf{P_C}$) vince il grande (il peso $\mathbf{P_F}$) perché, nello stesso tempo, percorre uno spazio maggiore.
Pertanto dell'antica antinomia riguardo l'*inganno* operato dai meccanici (nei Problemi Meccanici di scuola aristotelica è scritto che il meccanico agisce "**violando la natura**") è rimasto il solo, innocuo per l'intelligenza, aspetto paradossale.

> Oggetto del nostro stupore sono i fenomeni che accadono normalmente in natura (kata physin) e di cui ignoriamo la causa e i fenomeni contrari (para physin), dovuti ad abilità e a interventi dell'uomo per suo proprio beneficio. La natura opera spesso in contrasto con il nostro vantaggio perché il suo corso è sempre lo stesso, immutabile, mentre è vario e di volta in volta mutevole ciò che è utile per noi. Così quando bisogna agire **violando la natura**, la difficoltà ci imbarazza e richiede una specifica abilità: quella particolare abilità che ci soccorre, davanti alle difficoltà di questo genere, noi la chiamiamo meccanica.
>
> *Meccanica*, Corpus Aristotelicum, a cura di Maria Fernanda Ferrini, Milano, 2010

Galileo contesta esplicitamente che i *mecanici* possano agire *"ingannando, in certo modo, con le loro macchine, la natura"*. Alla diminuzione della forza corrisponde infatti, in ogni meccanismo, un aumento proporzionale della velocità (o dello spostamento, in un tempo assegnato). Avremmo davvero violato la legge di natura se avessimo vinto il grande con il piccolo mantenendo in entrambi la stessa velocità:

> *"Allora solamente si potria dire essersi superato il naturale instituto, quando la minor forza trasferisse la maggior resistenza con pari velocità di moto"*.

Galileo forniva così esplicita evidenza all'aforisma del contemporaneo Francesco Bacone: "si comanda alla natura solo obbedendo" [naturae enim non imperatur nisi parendo].

Osservazione sugli equilibri del piano inclinato e della leva

Quando si equilibrano pesi su due piani inclinati, la relazione di equilibrio tra le due componenti parallele ai piani:

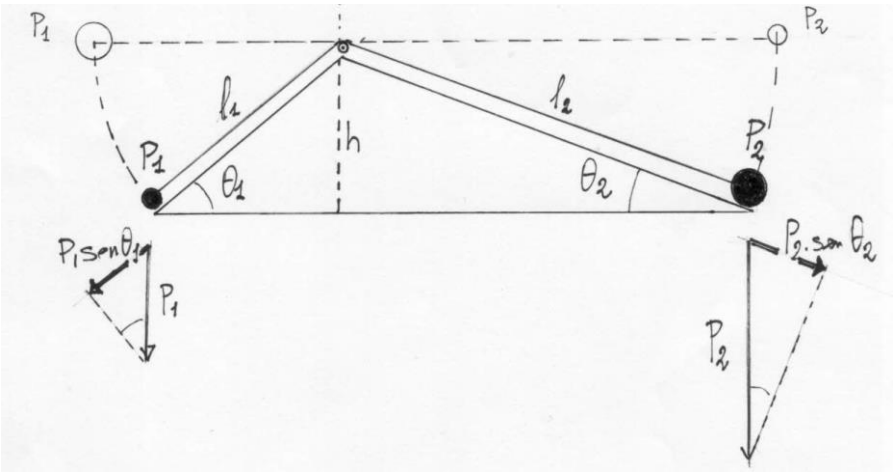
$$\mathbf{P_1} \cdot sen\,\vartheta_1 = \mathbf{P_2} \cdot sen\,\vartheta_2$$

dà luogo alla relazione seguente:

$$\mathbf{P_1} \cdot \frac{h}{l_1} = \mathbf{P_2} \cdot \frac{h}{l_2} \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{P_1}}{l_1} = \frac{\mathbf{P_2}}{l_2}$$

Osserviamo che l'invariante che esprime l'equilibrio nel piano inclinato (la componente della forza parallela al piano) è espresso nel rapporto *peso su lunghezza* mentre l'invariante che esprime l'equilibrio nella leva (il momento della forza) è il prodotto *peso per lunghezza*:

$$\mathbf{P_1} \cdot l_1 = \mathbf{P_2} \cdot l_2$$



6. La legge di *conservazione del lavoro*

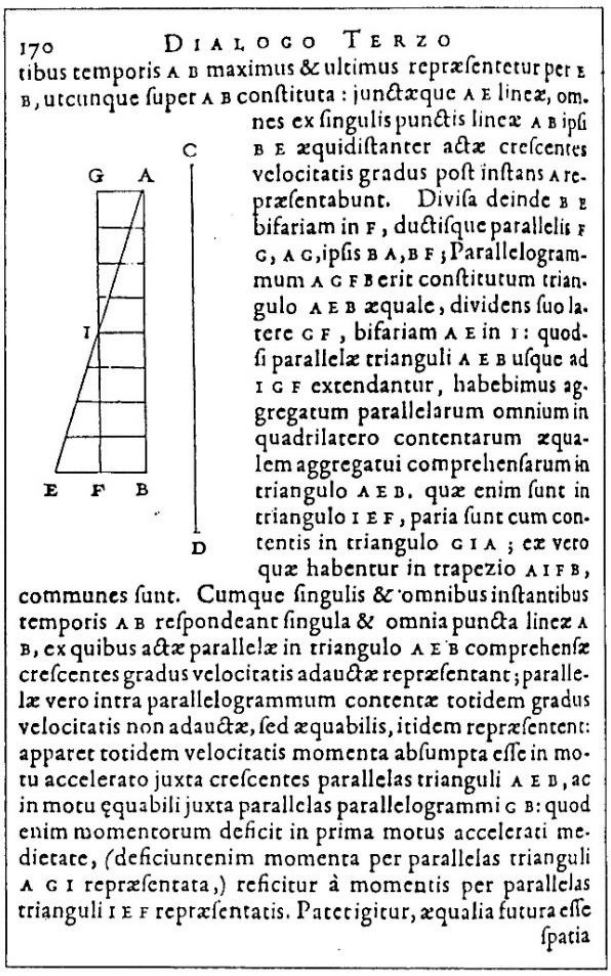
Riprendendo l'uguaglianza dei lavori – esprimente la condizione di equilibrio – osserviamo che essa va rilevata con riferimento agli *spostamenti infinitesimi del primo ordine*, cioè nella direzione della tangente alla traiettoria del possibile moto.
In generale, il lavoro si può esprimere o proiettando gli spostamenti nella direzione delle forze, o proiettando le forze nella direzione degli spostamenti.
Dalla prima interpretazione deriva il concetto medioevale di "gravitas secundum situm": un corpo è più o meno *pesante* [vale a dire atto a produrre più o meno lavoro] *quanto più la traiettoria del suo moto possibile è più o meno vicina alla direzione verticale*.
Quando le forze sono quelle gravitazionali, l'equilibrio dipende pertanto dal prodotto del peso per la misura del possibile avvicinamento ed allontanamento dal *centro comune delle cose gravi* (cioè dal centro della Terra).
Torricelli, nell'opera *De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum* (1644), enunciò il principio di Galileo in una forma equivalente: quando più gravi sono collegati, si ha equilibrio se il baricentro del loro insieme non può più dicendere (la sua quota è cioè invariabile per gli spostamenti vincolati dei gravi stessi).
Lagrange chiarirà che il *Teorema di Torricelli* - si ha equilibrio se il centro di gravità non può più discendere - equivale all'applicazione del Principio dei Lavori Virtuali perché equivale a dire che le forze di gravità non compiono lavoro per ogni spostamento [infinitesimo] compatibile con i vincoli.
Galileo ha pertanto intuito l'esistenza di una quantità indipendente dalla particolare traiettoria (il lavoro della forza gravitazionale).
Ad ogni quota è possibile quindi associare un certo *livello energetico* (energia potenziale) e il lavoro è la differenza dei valori dell'energia potenziale.
L'impossibilità di avere incrementi infinitesimi di lavoro (*Principio dei Lavori Virtuali*) equivale ad affermare la stazionarietà della funzione energia potenziale perché ogni lavoro è misurato dalla variazione di quest'ultima.

7. La cinematica del moto uniformemente accelerato

La chiave per comprendere la cinematica del moto uniformemente accelerato (anticamente detto *uniformemente difforme*), che appariva insolubile per la difficoltà di quantificare una velocità istantanea, fu l'intuizione medioevale dei matematici del *Merton College* di trattare il moto in termini di velocità media. L'idea di applicare la geometria per risolvere problemi cinematici derivò infatti dall'*invenzione* di Nicola D'Oresme di rappresentare le quantità come "segmenti tracciati a partire dal punto cui ineriscono queste quantità". Nei problemi cinematici le quantità considerate sono le velocità che ineriscono ai vari istanti temporali; nel medioevo non si arrivò però ad intuire che un esempio di moto "uniformemente difforme" era proprio quello della cadura dei gravi.

> D'Oresme non pensò di applicare la regola cosiddetta "mertoniana" (dal nome del Merton College di Oxford ove la regola era nota ed insegnata) al moto dei gravi che partano dalla quiete.
> Lo affermerà Domenico Soto, frate domenicano del cinquecento, insegnante di teologia a Salamanca. In un'opera intitolata "Super octo libri Phisicorum Aristotelis quaestiones", egli scrive: "Il moto uniformemente difforme è proprio dei corpi che si muovono di moto naturale", come nel caso di "una massa che cade da una certa altezza".

E. J. Dijksterhuis, *Il meccanicismo e l'immagine del mondo*, (ed. originale 1950), Milano, 1980, pag. 264



170 DIALOGO TERZO

tibus temporis A B maximus & ultimus repræſentetur per E B, utcunque ſuper A B conſtituta: junctæque A E lineæ, omnes ex ſingulis punctis lineæ A B ipſi B E æquidiſtanter actæ creſcentes velocitatis gradus poſt inſtans A repræſentabunt. Diviſa deinde B E bifariam in F, ductiſque parallelis F G, A G, ipſis B A, B F; Parallelogrammum A G F B erit conſtitutum triangulo A E B æquale, dividens ſuo latere G F, bifariam A E in I: quodſi parallelæ trianguli A E B uſque ad I G F extendantur, habebimus aggregatum parallelarum omnium in quadrilatero contentarum æqualem aggregatui comprehenſarum in triangulo A E B. quæ enim ſunt in triangulo I E F, paria ſunt cum contentis in triangulo G I A; ex vero quæ habentur in trapezio A I F B, communes ſunt. Cumque ſingulis & omnibus inſtantibus temporis A B reſpondeant ſingula & omnia puncta lineæ A B, ex quibus actæ parallelæ in triangulo A E B comprehenſæ creſcentes gradus velocitatis adauctæ repræſentant; parallelæ vero intra parallelogrammum contentæ totidem gradus velocitatis non adauctæ, ſed æquabilis, itidem repræſentent: apparet totidem velocitatis momenta abſumpta eſſe in motu accelerato juxta creſcentes parallelas trianguli A E B, ac in motu æquabili juxta parallelas parallelogrammi G B: quod enim momentorum deficit in prima motus accelerati medietate, (deficiuntenim momenta per parallelas trianguli A G I repræſentata,) reficitur à momentis per parallelas trianguli I E F repræſentatis. Patet igitur, æqualia futura eſſe ſpatia

La figura precedente, tratta dai *Discorsi*, riprende la dimostrazione "geometrica" mertoniana: in un sistema di riferimento che riporta il tempo (asse verticale) e la velocità (asse orizzontale), lo spazio percorso è rappresentato dalla superficie della figura compresa tra il diagramma delle velocità e l'asse verticale dei tempi.
Se la velocità iniziale è nulla, lo spazio percorso è dato dall'area del triangolo *AEB* che è equivalente al rettangolo *AGFB*. Quindi lo spazio percorso è dato dal prodotto della velocità media per il tempo.

> *(...) siccome a tutti gli istanti del tempo AB corrispondono, uno ad uno, tutti i punti della linea AB, e poiché le parallele condotte da questi punti e comprese nel triangolo AEB rappresentano i gradi crescenti della velocità aumentata, mentre le parallele contenute nel parallelogramma rappresentano analogamente altrettanti gradi della velocità non accresciuta, ma equabile; è chiaro che nel moto accelerato secondo le parallele crescenti nel triangolo AEB si avranno altrettanti momenti di velocità (momenta velocitatis) che nel moto equabile secondo le parallele del parallelogramma GB: infatti quella parte dei momenti che manca nella prima metà del moto accelerato* (infatti mancano i momenti rappresentati delle parallele del triangolo AGI) *è compensata dai momenti rappresentati dalle parallele del triangolo IEF.*
> *E' dunque manifesto che saranno eguali gli spazi percorsi nello stesso tempo da due mobili, uno dei quali si muova di moto uniformemente accelerato a partire dalla quiete, l'altro invece di moto equabile secondo un momento di velocità sudduplo* [pari alla metà] *del momento massimo di velocità del moto accelerato: che è quello che intendevamo dimostrare.*

(Dai *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata terza, teorema I)

Osserviamo che Galileo alterna brani in latino ove procede con metodo rigoroso di esposizione (*ars judicandi*) a brani in italiano che riportano i dialoghi tra i tre personaggi (*ars inveniendi*).

8. Il principio di relatività galileiano

Dal *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo tolemaico e copernicano* (1632)

> *Riserratevi con qualche amico nella maggior stanza che sia sotto coverta di alcun gran naviglio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anche un gran vaso d'acqua e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso le parti della stanza; i pesci si vedranno andar nuotando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto (...)*
>
> *(...) fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprendere se la nave cammina o pure sta ferma (...) le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne per una verso poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella lor acqua non con pi— fatica nuoteranno verso la precedente che verso la sussequente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accadrà che si riduchino verso la parte che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave (..)*
>
> *E di tutta questa corrispondenza d'effetti ne è cagione l'esser il moto della nave comune a tutte le cose contenute in essa ed all'aria ancora, che per ciò dissi io che si stesse sotto coverta (...)*

Il brano riportato, di gradevolissima lettura, stabilisce il cosiddetto *principio di relatività galileiana*: nessuna esperienza meccanica, compiuta all'interno di un sistema, stabilisce se il sistema è in quiete o in moto rettilineo uniforme. Uno dei più importanti esperimenti di tutti i tempi fu puramente "mentale".
Il *gran naviglio* rappresenta la nostra Terra e questa "parabola" di Galileo doveva persuadere gli avversari del sistema copernicano riguardo il paradosso di non avvertire gli effetti di velocità astronomiche vertiginose.

9. I Discorsi: la legge di caduta dei gravi

L'opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638) costituisce la sintesi della ricerca di Galileo e la prova dell'efficacia del nuovo metodo.
Le prime due giornate sono dedicate alla resistenza dei materiali e le altre due alla dinamica.

Importante è la critica alla tesi aristotelica della proporzionalità tra peso dei gravi e velocità di caduta; egli propone anche una dimostrazione di incoerenza logica.

Dai Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1638)

> *Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità dei quali fossero ineguali, è manifesto che se noi congiungessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velocitato dall'altro più veloce (…)*
> *ma le due pietre, congiunte insieme, fanno una pietra maggiore (…) adunque questa maggiore si muove men velocemente che la minore (…)*
> *nella libera e naturale caduta la minor pietra non gravita sopra la maggiore, ed in conseguenza non le accresce peso, come fa nella quiete (…)*

Quindi è la resistenza dell'aria che rende differenti le velocità dei due corpi quando essi sono disgiunti. Se sulla nostra Terra i gravi non cadono con la stessa velocità, il motivo è da ricercarsi in attriti e resistenze. Appena questi sono rimossi, la legge matematica è rigorosamente rispettata.
Questa considerazione introduce il prossimo punto.

10. Il *metodo* scientifico*: difalcare gli impedimenti della materia*

Qual è il cuore della scienza moderna così come è stata fondata da Galileo?
Il nocciolo della questione è contenuto nella risposta alla difficoltà rilevata da Simplico (che rappresenta gli aristotelici del tempo):

> *"le sottigliezze matematiche, vere in astratto, applicate alla materia sensibile, non rispondono"*

Questa è ancora oggi l'obiezione di alcuni: "questi sono solo teoremi matematici, astrazioni dell'uomo, ma la natura non segue davvero queste leggi …"
La maggior parte delle persone, anche istruite, non sa rispondere debitamente a questa nota obiezione.
La risposta all'obiezione la troviamo nello stesso libro di Galileo, in quanto egli, fondando la scienza, ha fondato anche la filosofia della scienza perché è stato contemporaneamente grande filosofo di sé stesso.

Ecco la risposta di Galileo:

> *"il filosofo geometra riconosce in concreto gli effetti dimostrati in astratto, **se** difalca gli impedimenti della materia"*

Nella risposta è nascosta l'essenza del nuovo metodo che fa riferimento all'idea di un "pensiero per processo", quello alla base del concetto del *limite matematico*.
Infatti, nella definizione di limite matematico è nascosta una sorta di "sfida dialettica": per ogni scelta di grado di approssimazione del risultato teorico dobbiamo saper definire la situazione che garantirà quell'approssimazione.

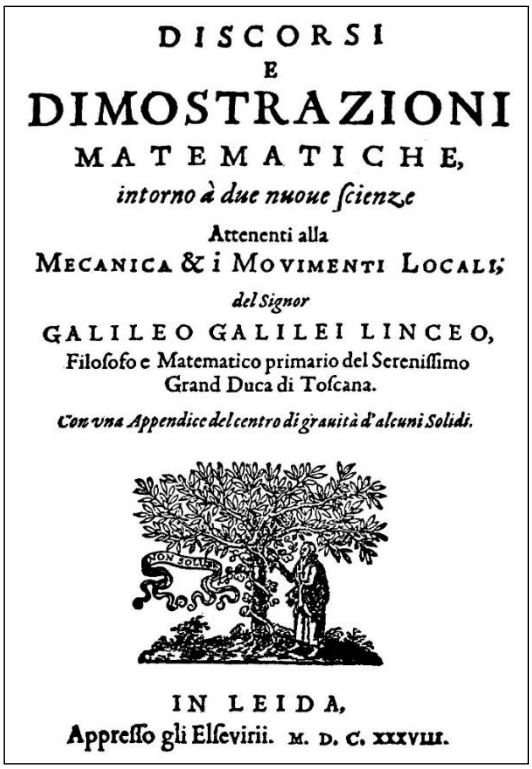
Su questa nostra Terra, le penne degli uccelli e i martelli non cadono insieme. Cadono insieme solo in un laboratorio ideale costruito appositamente perché valga la legge (questa necessità di un laboratorio ideale è proprio ciò che Goethe non voleva accettare). Sulla luna invece cadono insieme: ricordiamo di avere visto gli astronauti dell'Apollo 15 far cadere una penna e un martello: cadevano davvero insieme toccando il suolo della luna nello stesso momento.
Invece, per farli cadere insieme su questa Terra, dobbiamo mettere penna e martello in un tubo ed estrarne l'aria.
Galileo ci ha dato la chiave risolutiva della questione fondamentale, la chiave della rinascita della scienza e quindi della nascita della scienza moderna: abbiamo il diritto di assumere l'isomorfismo tra il mondo e la matematica in quanto sono accidentali e rimovibili le cause che impedirebbero l'isomorfismo stesso.
In altre parole, **sappiamo ritrovare le astrattezze della matematica nelle verifiche concrete sino al grado voluto**: questa è l'idea che fa riferimento al pensiero "per processo".
Come poteva un pensiero di questo genere appartenere ad un cervello antico per il quale i concetti erano invece rigorosamente separati?
Consideriamo, ad esempio, gli Elementi (di geometria) di Euclide: non vi troveremo mai la minima commistione tra retta e curva. Eppure, oggi, a noi sembra naturale pensare ad un tratto di retta come un arco di circonferenza di raggio infinito.

Fu in particolare la riflessione di Niccolò Cusano (il filosofo quattrocentesco che Cassirer considerò l'iniziatore del pensiero moderno) ad essere feconda per i matematici, per i metafisici e per gli scienziati. Egli vide la possibilità di un modo di pensare nuovo, diverso da quello degli antichi.
Gli antichi pensavano per concetti separati. Cusano, certamente illuminato da un pensiero differente, inizia a escogitare il modo di pensare "per processo", dandocene esempi.

Il modello fisico-matematico può riprodurre i fenomeni naturali fino al grado voluto di precisione, rimuovendo in conseguente opportuna misura, gli impedimenti della materia.
Sintetizzando: Galileo ha fondato la scienza moderna sulla base dell'idea di processo, per cui **l'ideale era ritrovabile, con approssimazione fino al grado voluto, nella realtà concreta**.
Siamo giunti al cuore della fondazione della fisica matematica: nella mente platonica di Galileo, aver compreso come "rimuovere" l'impedimento a cogliere l'isomorfismo tra la matematica e il mondo, permetterà di concludere che la scienza che descrive la posizione degli astri può valere anche per la caduta delle pietre.

11. La prima delle *due nuove scienze* dei *Discorsi*

I contributi di Galileo alla Scienza dei materiali sono contenuti nel suo trattato più maturo: i *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del 1638.
Secondo Timoshenko questo è, in assoluto, il primo libro scientifico sulla resistenza dei materiali; fino ai tempi di Galileo mai si erano infatti applicati concetti matematici direttamente alla resistenza delle costruzioni e non al solo equilibrio tra i pesi.


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
NON SOLUS
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

I Discorsi sono distribuiti su quattro giornate e riportano i dialoghi di tre persone:
- Salviati, rappresentante la nuova scienza;
- Sagredo, rappresentante l'uomo disposto ad apprendere senza pregiudizi;
- Simplicio, rappresentante la scienza conservatrice.

Della quattro giornate interessano, al nostro discorso, le prime due, che comprendono tutto lo studio di Galileo sulla resistenza dei materiali.
I temi sono i seguenti:
- *intorno alla resistenza de i corpi all'essere spezzati*;
- *qual potesse esser la causa di tal coerenza*.

Riguardo a quest'utimo quesito, Salviati riferisce quello che ha appreso dal "nostro accademico", cioè da Galileo: la resistenza di un solido alla rottura dipende da

> *"qualche glutine, visco o colla, che tenacemente colleghi le particole delle quali esso corpo è composto"*.

Galileo inizia la sua trattazione con una solenne rivalutazione del sapere tecnico: **frequentare l'Arsenale di Venezia è esercizio di alta filosofia**.

> *Largo campo di filosofare a gl'intelletti specolativi parmi che porga la frequente pratica del famoso arsenale di voi, Signori Veneziani, ed in particolare in quella parte che mecanica si domanda; atteso che quivi ogni sorte di strumento e di machina vien continuamente posta da numero grande d'artefici, tra i quali, e per l'osservazioni fatte dai loro antecessori, e per quelle che di propria avvertenza vanno continuamente per se stessi facendo, è forza che ve ne siano de i peritissimi e di finissimo discorso.*

12. La prima giornata dei *Discorsi*

La prima giornata dei *Discorsi* inizia con un interrogativo: perché le costruzioni perdono in robustezza aumentandone le dimensioni?

Perché molte invenzioni di macchine riescono in piccolo, che in grande poi non sussistono?

Sagredo non riesce a comprenderne il motivo,

essendo che tutte le ragioni della meccanica hanno i fondamenti loro nella Geometria.

In particolare Salviati si domanda perché i meccanici dell'Arsenale utilizzavano, per sostenere le grandi navi necessitanti riparazioni, un numero di sostegni molto maggiore di quello che avrebbero adottato, in proporzione, per una nave più piccola:

> *per qual ragione facevano tanto maggior apparecchio di sostegni intorno a quella gran galeazza che si doveva varare, che non si fa intorno a vasselli minori*

Per Sagredo un tal comportamento è il risultato di un *"concetto vano del vulgo"*.
La risposta di Salviati a questo interrogativo, che si sviluppa nell'arco delle due giornate, rappresenta il crinale tra due grandi periodi della storia della scienza del costruire:
- il primo periodo nel quale la solidità di una struttura era affidata al mutuo disporsi delle parti così da evitare l'insorgere di cinematismi;
- il secondo periodo nel quale si indaga direttamente la resistenza del materiale.

Salviati osserva che la sola forma non può essere responsabile della robustezza, altrimenti non si spiegherebbe perché piccole colonnette si possono maneggiare con disinvoltura mentre le vere colonne per certi movimenti vanno in pezzi.

> *piccole guglie, colonnette ed altre solide figure, sicuramente si potranno maneggiare distendere e rizzare, senza risico di rompersi, che le grandissime per ogni sinistro accidente andranno in pezzi, e non per altra cagione che per il loro proprio peso*.

Probabilmente Galileo aveva anche in mente l'erezione dell'obelisco vativano (vedi la parte finale del punto 3).

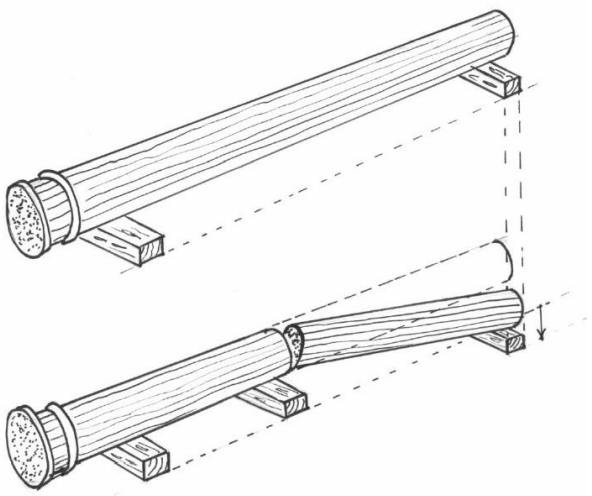
Ma, ed è essenziale, queste rotture non sono dovute ad *imperfezioni* della materia.

Infatti la conclusione cui giungerà Salviati è che, nella sola forma non è contenuta la legge della robustezza:

> *"astraendo tutte le imperfezioni della materia (...) il solo esser materiale fa che la macchina maggiore ... in tutto risponderà alla minore ... fuor che nella robustezza e resistenza"*

Galileo riporta un episodio significativo.

Era una grossissima colonna di marmo distesa, e posata, presso alle sue estremità, sopra due pezzi di trave; cadde in pensiero dopo certo tempo ad un mecanico che fusse bene, per maggiormente assicurarsi che gravata dal proprio peso non si rompesse nel mezzo, supporgli anco in questa parte un terzo simile sostegno: parve il consiglio generalmente molto opportuno, ma l'esito lo dimostrò essere stato tutto l'opposito, atteso che non passarono molti mesi che la colonna si trovò fessa e rotta, giusto sopra il nuovo appoggio di mezzo.



Deposti in piana terra i due pezzi della colonna, si vedde che l'uno de i travi, su 'l quale appoggiava una delle testate, si era, per la lunghezza del tempo, infracidito ed avvallato, e, restando quel di mezzo durissimo e forte, fu causa che la metà della colonna restasse in aria, abbandonata dall'estremo sostegno; onde il proprio soverchio peso gli fece fare quello che non avrebbe fatto se solo sopra i due primi si fusse appoggiata, perché l'avvallarsi qual si fusse di loro, ella ancora l'arebbe seguito. E qui non si può dubitare che tal accidente non sarebbe avvenuto in una piccola colonna, benché della medesima pietra e di lunghezza rispondente alla sua grossezza con la proporzione medesima della grossezza e lunghezza della colonna grande.

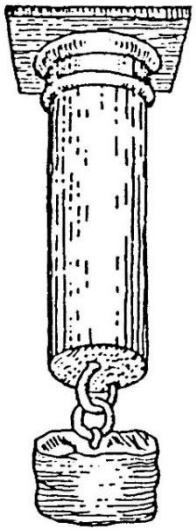
La colonna grande appoggiata sui due sostegni originari non si sarebbe rotta in quanto avrebbe potuto seguire l'abbassamento del sostegno infracidito (il regime statico di una struttura isostatica è insensibile ai cedimenti vincolari); invece la presenza dell'appoggio centrale ha provocato un inversione dei momenti che l'ha spezzata. Comunque **questo non sarebbe successo se la colonna fosse stata più piccola, anche se in scala perfetta.**

Anche nelle ressitenze degli animali non si rispetta una legge di proporzione.

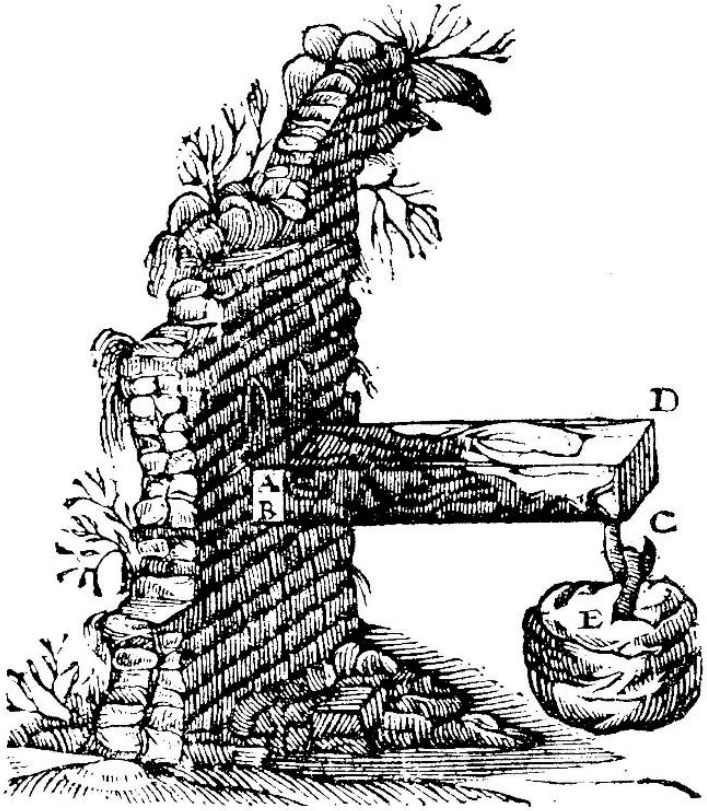
Chi non vede come un cavallo cadendo da un'altezza di tre braccia o quattro si romperà l'ossa, ma un cane da una tale, e un gatto da una di otto o dieci, non si farà mal nissuno, come né un grillo da una torre, né una formica precipitandosi dall'orbe lunare?

13. La seconda giornata dei *Discorsi*

La seconda giornata inizia con un'osservazione riguardo al fatto che, in una trave, la resistenza
ben che grandissima contro alla forza di chi per diritto gli tira, minore per lo più si osserva nel violentargli per traverso



In altre parole la stessa trave caricata come mensola resiste assai meno che se fosse caricata assialmente.



Galileo ha fiducia che a chiarire il fenomeno bastino le leggi della leva.

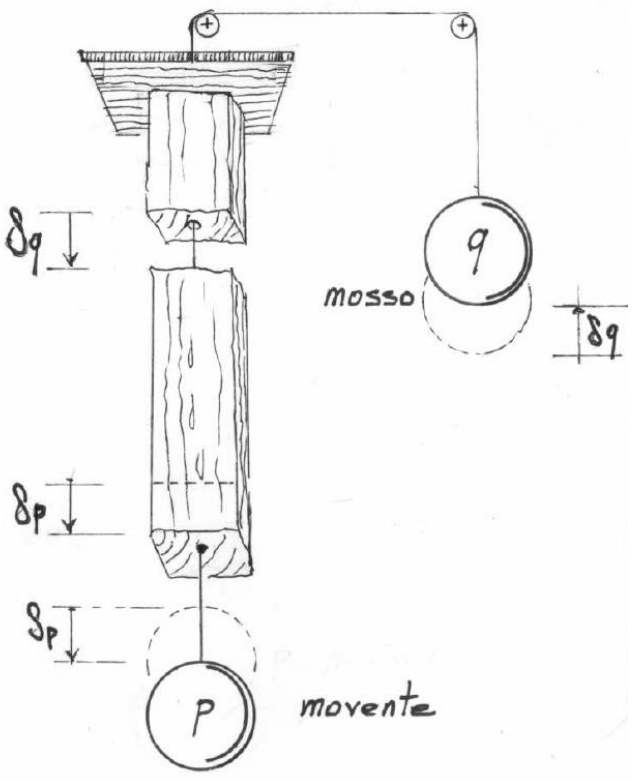
Il modello di calcolo da lui usato (sulla base di un'unica forza resistente centrata nel baricentro, interpretabile – ai nostri occhi moderni – come risultante di una distribuzione uniforme delle tensioni nella sezione) corrisponde all'attuale metodo di analisi limite rigido-plastica.
Galileo posizionò però, erroneamente, l'asse neutro all'intradosso della trave: per questo motivo sovrastimò la resistenza, anche se sono corrette le proposizioni espresse in termini di rapporti tra due momenti resistenti o tra due momenti agenti.
Nel seguito Mariotte, Bernoulli, Eulero arricchiranno il modello considerando disuniformi distribuzioni delle tensioni.
Coulomb, alla fine del Settecento, associerà alle tensioni normali anche forze tangenziali.
Navier e Cauchy, nell'Ottocento, estenderanno l'analisi tensionale ai corpi tridimensionali.

Galileo definisce la resistenza assoluta:
"quella che si fa col tirar la trave per diritto, perché allora tanto è il moto del movente quanto quello del mosso" .

In termini moderni, la resistenza assoluta corrisponde all'azione assiale resistente limite in stato di trazione pura.
Quando la trave è "tirata per diritto" la resistenza che essa offre, rappresentata dal contrappeso "mosso" q, è pari al peso movente p.

Infatti, nell'equazione che esprime l'uguaglianza dei lavori i due spostamenti sono uguali:

$$p \cdot \delta_p = q \cdot \delta_q \rightarrow p = q \cdot \frac{\delta_q}{\delta_p} = q$$



14. Le prime cinque *proposizioni*

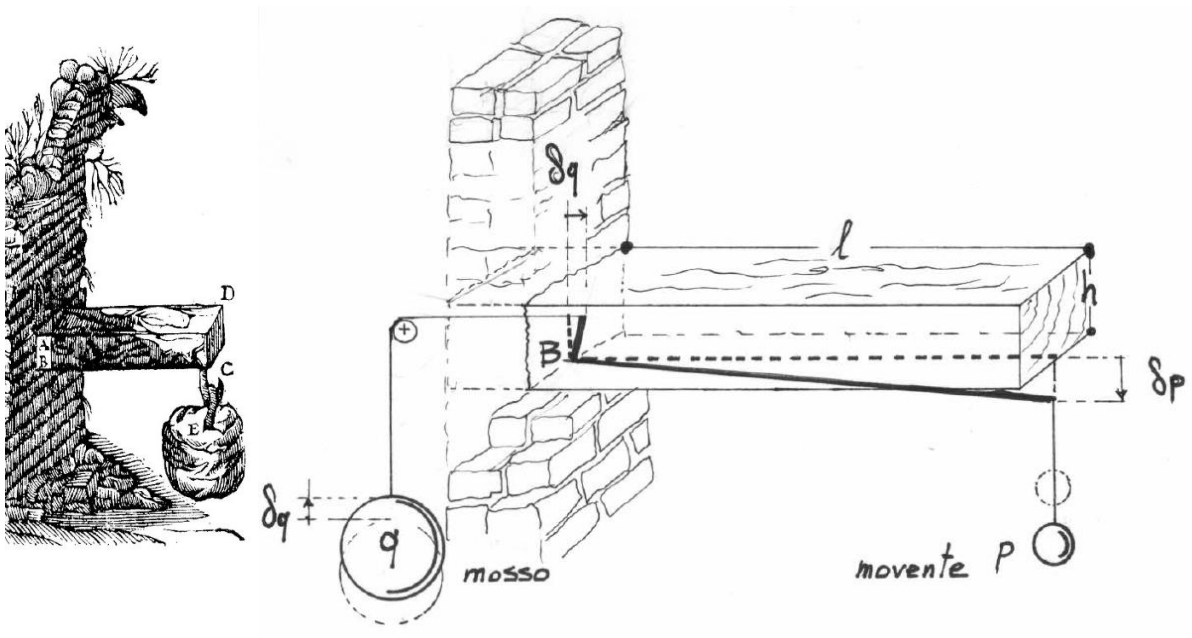
Diamo la dimostrazione delle prime cinque proposizioni, relative ai rapporti tra la resistenza assoluta q e la resistenza relativa p, ai rapporti tra le resistenza relative p (anche in funzione dei rapporti tra le resistenze assolute q).
Utilizziamo formule matematiche (che Galileo non usava) per facilitare la comprensione.

14.1 Prima proposizione

> *è manifesto che, dovendosi spezzare, si romperà nel luogo B, dove il taglio del muro serve per sostegno, e la BC per la parte della leva dove si pone la forza; e la grossezza del solido BA è l'altra parte della leva, nella quale è posta la resistenza, che consiste nello staccamento che s'ha da fare della parte del solido BD, che è fuor del muro, da quella che è dentro: e per le cose dichiarate, il momento della forza posta in C al momento della resistenza, che sta nella grossezza del prisma cioè nell'attaccamento della base BA con la sua contigua, ha la medesima proporzione che la lunghezza CB alla metà della BA; e però l'assoluta resistenza all'esser rotto, che è nel prisma*

Galileo quindi assimila il comportamento della mensola a quello di una leva angolare con il fulcro sul lato inferiore della base d'incastro.
Quando la trave è "violentata per traverso", il rapporto tra il contrappeso resistente "mosso" q e il peso "movente" p è dato dal rapporto tra i rispettivi spostamenti virtuali, avendo indicato con $\delta\varphi$ la rotazione infinitesima della leva angolare:

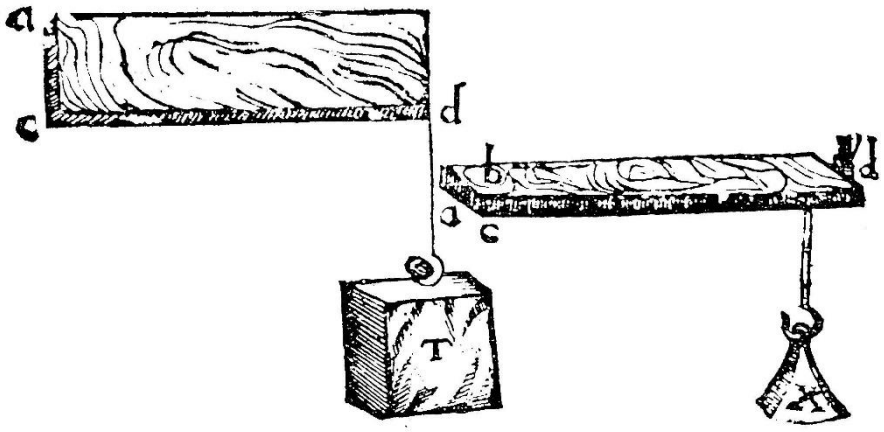
$$\frac{q}{p} = \frac{\delta_p}{\delta_q} = \frac{l \cdot \delta\varphi}{(h/2) \cdot \delta\varphi} = \frac{l}{(h/2)}$$



In conclusione: *l'assoluta resistenza all'esser rotto ha* [rispetto al peso violentante per traverso p] *la medesima proporzione che la lunghezza BC alla metà di AB*

14.2 Seconda proposizione

Qui possiamo immediatamente intender, come e con che proporzione resista più una verga, o vogliam dir prisma più largo che grosso, all'esser rotto, fattogli forza secondo la sua larghezza, che secondo la grossezza.



si cerca perché, volendola romper per taglio, come nella figura, resisterà al gran peso T; ma posta per piatto, come nella seconda figura, non resisterà all'X, minore del T

Se la sezione della trave è $b \cdot s$ (larghezza b e grossezza s) il peso che rompe la trave nei due casi è:

- trave che lavora per taglio: $T = q \cdot \frac{(b/2)}{l}$

- trave che lavora per piatto: $X = q \cdot \frac{(s/2)}{l}$

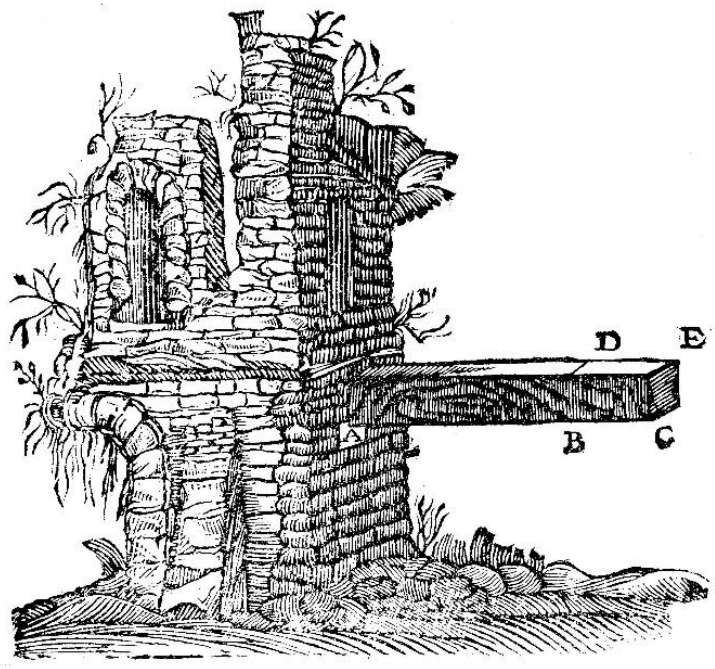
Poiché q è la stessa nei due casi (la forza che rompe la trave *tirandola per diritto* è la stessa anche se latrave ruota di un angolo retto), si ha:

$$\frac{T}{X} = \frac{b}{s}$$

concludesi che la medesima riga o prisma più largo che grosso resister più all'esser rotto per taglio che per piatto, secondo la proporzione della larghezza alla grossezza

14.3 Terza proposizione

Conviene ora che cominciamo a investigare secondo qual proporzione vadia crescendo il momento della propria gravità, in relazione alla propria resistenza all'essere spezzato in un prisma o cilindro, mentre, stando parallelo all'orizonte, si va allungando; il qual momento trovo andar crescendo in duplicata proporzione di quella dell'allungamento.



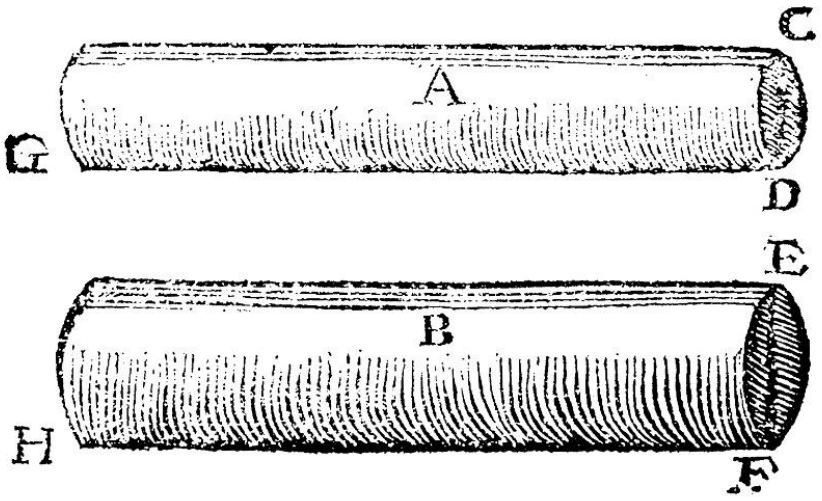
Nella terza proposizione Galileo indaga sull'effetto flettente dovuto al peso proprio in una trave che varia di lunghezza:

il qual momento trovo andar crescendo in duplicata proporzione di quella dell'allungamento

In questo caso il peso p è il peso stesso della trave che va posizionato nel baricentro della trave stessa, e pertanto il momento è proporzionale al quadrato della lunghezza l:

$$p \propto l \rightarrow p \cdot l \propto l^2$$

14.4 Quarta proposizione



Mostreremo adesso, nel secondo luogo, secondo qual proporzione cresca la resistenza all'essere spezzati ne i prismi e cilindri, mentre restino della medesima lunghezza e si accresca la grossezza.

Nella quarta proposizione Galileo indaga sugli effetti dell'accrescimento della grossezza della trave, cioè della sua sezione trasversale.

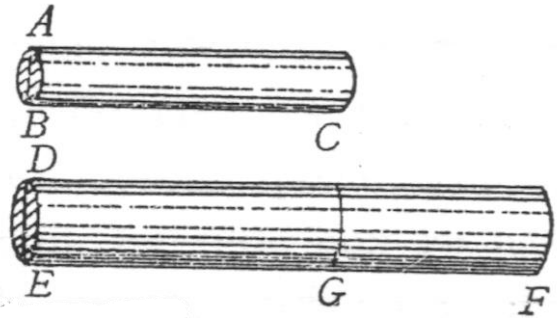
In questo caso la lunghezza l è costante, ma la resistenza assoluta varia col quadrato del diametro d della trave:

$$l = costante, \qquad q \propto d^2 \rightarrow p = q \cdot \frac{d/2}{l} \propto d^3$$

Nei prismi e nei cilindri egualmente lunghi, ma disegualmente grossi, la resistenza all'esser rotti cresce in triplicata proporzione de i diametri delle lor grossezze, cioè delle lor basi

14.5 Quinta proposizione

passiamo a investigare quello che accaggia a solidi differenti in lunghezza e grossezza insieme.



Nella quinta proposizione si confrontano i carichi di collasso per cilindri diversi per lunghezza e per diametro della base (il carico è concentrato all'estremo libero della mensola).

In questo caso la lunghezza l non è costante, e la resistenza assoluta varia col quadrato del diametro s della trave:

$$q \propto d^2 \rightarrow p = q \cdot \frac{d/2}{l} \propto \frac{d^3}{l}$$

I prismi e cilindri di diversa lunghezza e grossezza hanno le lor resistenze all'esser rotti di proporzione composta dalla proporzione de i cubi de i diametri delle lor basi e della proporzione delle lor lunghezze permutamente prese

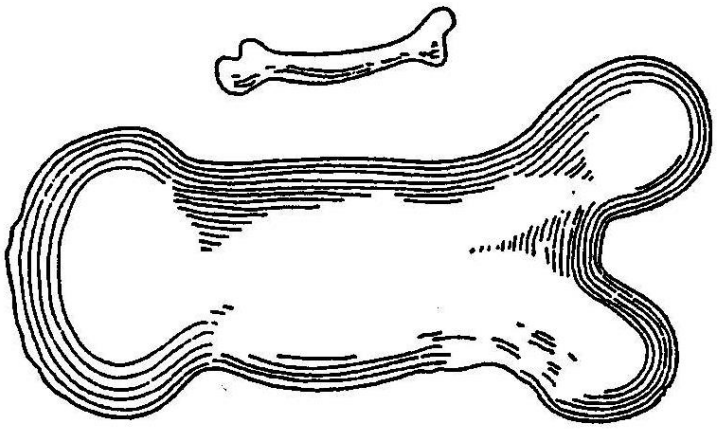
15. Il problema fondamentale

Galileo riprende la domanda fondamentale del dialogo: esiste un limite dimensionale alle strutture?
Esiste, naturalmente, ed è possibile ricavarlo utilizzando le formule già trovate.
Galileo ricava così la massima lunghezza possibile per una mensola soggetta al peso proprio e poi indaga su altre condizioni di vincolo.

Dalle cose sin qui dimostrate apertamente si raccoglie l'impossibilità del poter non solamente l'arte, ma la natura stessa, crescer le sue macchine a vastità immensa ... come anco non potrebbe la natura far alberi di smisurata grandezza, poiché i rami loro, gravati dal proprio peso, finalmente si fiaccherebbero.

Per meglio chiarire il concetto nel libro appare la figura di un osso e poi lo stesso allungato di tre volte.

E per un breve esempio di questo che dico, disegnai già la figura di un osso allungato solamente tre volte, ed ingrossato con tal proporzione, che potesse nel suo animale grande far l'uffizio proporzionato a quel dell'osso minore nell'animal più piccolo, e le figure son queste dove vedete sproporzionata figura che diviene quella dell'osso ingrandito.



Affinché l'osso allungato possa essere staticamente equivalente all'originale, lo spessore deve aumentare più che in proporzione.

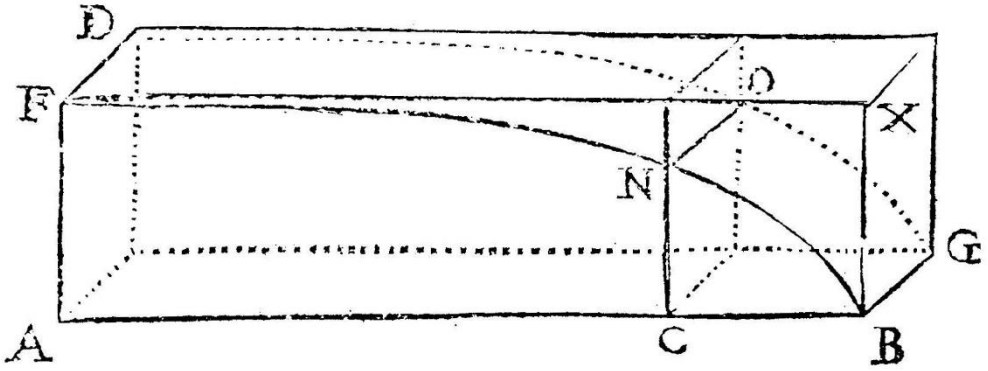
Dal che è manifesto, che chi volesse mantener in un vastissimo gigante le proporzioni che hanno le membra in un uomo ordinario, bisognerebbe o trovar materia molto più dura e resistente, per formarne l'ossa, o vero ammettere che la robustezza sua fusse a proporzione assai più fiacca che ne gli uomini di statura mediocre; altrimente, crescendogli a smisurata altezza, si vedrebbono dal proprio peso opprimere e cadere. Il che forse fu avvertito dal mio accortissimo Poeta, mentre descrivendo un grandissimo gigante disse:

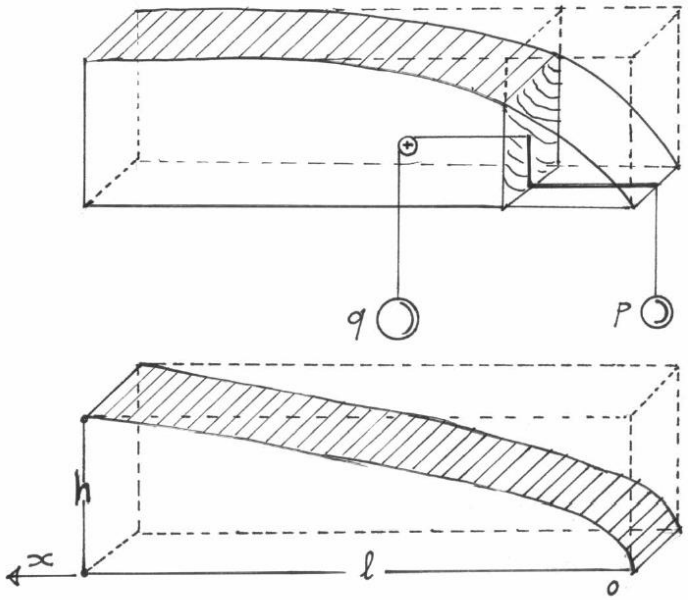
Non si può compartir quanto sia lungo,
sì smisuratamente è tutto grosso.
[Ariosto Orlando Furioso, XVII canto]

16. L'ottimizzazione strutturale

Nell'ultima parte del dialogo egli considera che se la sola sezione d'incastro è al massimo della resistenza, le sezioni intermedie conservano ancora delle risorse. Il carico è concentrato all'estremo libero della mensola.

Ora stante questo, par ben ragionevole, anzi pur necessario, che gli si possa dare un taglio, per il quale, togliendo via il superfluo, rimanga un solido di figura tale che, in tutte le sue parti, sia egualmente resistente.
Di qui si vede come con diminuzione di peso di più di trentatré per cento si possono far i travamenti, senza diminuir punto la loro gagliardia.





Poiché il momento agente è lineare con x il momento resistente deve essere parimenti lineare con x. Poiché, in ogni sezione, sia la resistenza assoluta q sia il braccio $h/2$ sono lineari con h, ne deriva che il momento resistente è direttamente proporzionale ad h^2 e pertanto h deve essere proporzionale a $\sqrt{x}$:

$$h^2 \propto x \rightarrow h \propto \sqrt{x}$$

Nel disegno originario del libro di Galileo (prima immagine nella figura precedente) il profilo di uniforme resistenza è tracciato partendo dalla tangente orizzontale nella sezione di incastro; invece il profilo corretto (terza immagine nella figura precedente) va tracciato partendo dalla tangente verticale nella sezione all'estremo libero della trave.

L'area corrispondente è data dall'integrale:

$$\frac{h}{\sqrt{l}}\int_0^l \sqrt{x}\cdot dx = \frac{h}{\sqrt{l}}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{l^3}\right] = \frac{2}{3}\cdot lh$$

e pertanto Galileo ha correttamente calcolato che l'area da togliere, pari a 1/3 del volume della trave, supera il 33%.

17. Osservazione critica finale

I cilindri e i prismi di cui parla Galileo sono simili ai solidi della geometria di Euclide: la trave di Galileo è rigida e attinge al suo stato limite senza deformarsi.

Nei *Problemi Meccanici* aristotelici era espressa la stessa fiducia nella riduzione alla leva del problema strutturale.

> *Perché, un bastone si rompe più facilmente per mezzo del ginocchio se le mani lo afferrano alle estremità piuttosto che in posizioni vicine al ginocchio stesso?*
> *Forse perché il ginocchio costituisce una specie di centro ed una cosa qualunque si muove tanto più facilmente quanto più essa è lontana dal centro. Per spezzare un oggetto necessita muoverlo.*
>
> (Dai Problemi meccanici, Scuola Aristotelica)

Riguardando l'antico problema, Galileo ebbe l'idea geniale di considerare una leva angolare *interna* alla trave stessa.
Anche se posizionò erroneamente l'asse neutro all'intradosso della sezione della trave, alcune delle sue conclusioni sono corrette. Saranno i successori di Galielo a affinare sempre più il modello di calcolo da lui impostatto (punto 13).
A questo proposito, riprendendo le considerazioni iniziali e quelle del punto 3, riportiamo un brano interessante.

> "E' il fenomeno consueto della lucidità dei successori. Il pioniere, che a costo di grandi sforzi intellettuali è riuscito a sbarazzarsi degli errori passati, mostra ancora le tracce di questa lotta, forse anche nel suo pensiero, ma certamente nel suo modo di esprimersi mentre i successori, in forza delle nuove concezioni, sono in grado, una volta liberati dai legami del passato, di cominciare là dove egli si interruppe, e di esprimere in forma perfettamente chiara ciò che nell'opera del precursore era ancora più o meno oscuro."

E. J. Dijksterhuis, *Il meccanicismo e l'immagine del mondo*, (ed. originale 1950), Milano, 1980, pag. 480.