Ciclo di Conferenze:

Eulero e il suo tempo

Quarta Conferenza:

Eulero e l'Ingegneria

A cura del Dott. Ing. Giuseppe Stagnitto
Collaboratore Scientifico della Cattedra
Costruzioni in Cemento Armato e Precompresso
Universita' di Pavia.

Più potente è l'armonia nascosta della manifesta
(Eraclito)

Quam ob rem Geometris munus haud ingratum me esse oblaturum confido, si egregium consensum inter haec duo principia toto coelo a se invicem diversa dilucide demontravero
[Per la qual cosa io confido di aver lasciato agli Studiosi un dono non ingrato , se avrò lucidamente ed universalmente dimostrato come egregiamente accordare questi due principi tra loro diversi].

(Eulero, 1774)

Premessa

Gli oratori delle precedenti conferenze hanno mostrato come, conformemente alla visione ottimistica delle prospettive della scienza propria dell'Illuminismo, l'opera di Eulero portò fondamentali contributi alle scienze fisiche applicate e quindi a vari campi della moderna ingegneria (idraulica, meccanica, strutturale).
Per la mia specifica competenza, l'oggetto di questa conferenza e' l'esame dei contributi di Eulero alla meccanica del corpo deformabile che, come noto, costituisce il fondamento della Scienza delle Costruzioni.
Soprattutto mi propongo di sviluppare il tema della **nascita e della formulazione della cosiddetta *teoria della trave***, inquadrando storicamente il problema e indagando anche sullo stato della conoscenza della meccanica generale di quei tempi.
Con Eulero la meccanica, sviluppata da Galileo e da Newton, estenderà il suo dominio dal punto materiale ai sistemi continui, rigidi e deformabili.
Si esamineranno gli effetti dell'applicazione sistematica alla meccanica del nuovo strumento dell'analisi infinitesimale (che Newton, pur essendone insieme al Leibniz l'inventore, non aveva utilizzato nei suoi *Principia*).
Eulero applico' il nuovo strumento matematico allo studio delle travi in regime elastico e quindi alla determinazione delle curve rappresentanti le deformate elastiche.
Ricordiamo che, nel secolo precedente, Galileo, nello studio delle travi, non pote', proprio per la mancanza dell'adatto strumento matematico, prendere in considerazione il

problema della deformazione della trave che è da lui considerata si' materiale (vale a dire *pesante* e di resistenza finita) ma *rigida*.
Eulero affrontò questo problema per via *diretta*, cioè imponendo l'equilibrio diretto sulla sezione, e in via *variazionale* cioè ricavando quella forma di deformata che minimizzi una certa funzione avente il significato fisico di energia potenziale elastica incamerata dalla struttura nella sua deformazione.
In occasione di queste ricerche egli scoprì la possibilità di instabilità nel comportamento sotto carico di punta di un pilastro snello e ricavò quell'espressione del carico critico che è tuttora utilizzata da ogni progettista, e che piu' di ogni altra scoperta, lo rese popolare fra i calcolatori di Strutture.
Cause efficienti e metodo dei massimi e minimi erano così due vie diverse per giungere allo stesso risultato di descrivere matematicamente il fenomeno.

La *riscoperta* della meccanica dell'illuminismo

Come ha sintetizzato nella sua conferenza il Prof. Cauvin "i grandi risultati ottenuti dai fondatori (soprattutto Newton) hanno messo un po' in ombra le realizzazioni dei successori, ritenute spesso come semplici sviluppi deduttivi dei principi fondamentali".
Nella realtà questi sviluppi hanno spesso richiesto una pari originalità di pensiero; il Prof. Tagliaferri, quasi suggerendo uno dei punti chiave di queste nostre riflessioni, ha chiarito che, contrariamente all'opinione più diffusa e riportata in quasi tutti i testi, la ben nota formula vettoriale che trascrive la seconda legge della dinamica:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{a}$$

non compare in nessun scritto di Newton (e non si tratta naturalmente di una questione di mera simbologia!)
E' inoltre da tenere presente, come sarà nel seguito chiarito, che costituisce un passo concettuale di grande rilevanza l'estensione della legge ad elementi infinitesimi:

$$d\vec{F} = dM \cdot \vec{a}$$

Il Prof. C. Truesdell in un saggio che costituiva l'editoriale del primo numero della rivista *Archive for history of exact sciences* auspicava un programma di ricerche per la *riscoperta* della meccanica nell'Età della Ragione.
Costituiscono parte di questo progamma i suoi tre saggi storici maggiori, pubblicati nei volumi 11_2, 12, 13 dell'Opera Omnia di Eulero, proprio in quanto Eulero è il più grande fisico teorico del diciottesimo secolo.
Grazie all'interessamento del Prof. Dario Bozzolo della STS ho potuto studiare questi volumi dell'Opera Omnia; mi sono inoltre documentato sui testi posseduti dalla Biblioteca Centrale dell'Università di Pavia che in particolare conserva le edizioni originali di tutte le opere di Eulero, gli atti dell'Accademia di Pietroburgo e la raccolta della serie degli *Acta Eruditorum* di Lipsia.
Darò in questa conferenza la libera traduzione in linguaggio tecnico moderno di alcuni passi tratti dalle memorie di Eulero.
Avverto che, come mi è stato confermato da esperti, pur trattandosi di un latino denso di tecnicismi (quasi una lingua artificiale) la scrittura presenta brani di notevole eleganza

stilistica: non sarà fuori luogo ricordare che Eulero (oltre alle potenze fino alla sesta dei primi cento numeri primi) conosceva l'intera Eneide a memoria!

Truesdell nel volume III/1 dell'opera *Handbuch der Physik* ([6],1960), lamentando che opere adeguate di critica storica sui principi della meccanica non fossero ancora apparse, aggiungeva testualmente:

> "The remarks on this subject given in treatises or general histories of phisics are often mendacious and usually so incomplete and inaccurate as to be totally misinformative".

Riporto a titolo di esempio un brano di sintesi storica tratto da un'opera enciclopedica, peraltro autorevole e diffusa, chiarendo che su quasi ogni testo di storia della fisica si riportano concetti analoghi:

> Col Newton sono posti i principi fondamentali della meccanica classica. L'ulteriore sviluppo di questa fu quasi esclusivamente uno sviluppo analitico, cioè formale.
> Ci limiteremo pertanto a ricordare solamente che, mentre la trattazione newtoniana è puramente geometrica, L. Euler tentò per primo una trattazione analitica, seguito con più fortuna da C.Maclaurin e dal D'Alembert che enunciò e applicò per primo il principi che porta il suo nome alla dinamica dei sistemi (...)

Fortunatamente questa conferenza è stata preceduta da quella del Prof. Carlo Felice Manara che ha ben chiarito come uno sviluppo analitico non costituisce soltanto uno sviluppo formale: egli ha ricordato il parere del grande matematico Hilbert che collegava strettamente lo sviluppo della matematica e quello della fisica matematica.

In questa conferenza mi sforzerò di mostrare l'enorme sforzo intellettuale che è stato necessario per formulare nei termini che ora ci sono quotidiani alcuni problemi della meccanica: in particolare **furono necessari quaranta anni di profonde riflessioni da parte del genio di Eulero per stabilire che lo studio generale della trave elastica richiede l'impiego contemporaneo di *entrambe* le equazioni di equilibrio alla rotazione e alla traslazione!**

Riguardo alla maggior *fortuna* del Maclaurin nel tradurre analiticamente i principi della meccanica riporto un passo tratto dall'introduzione storica alla dinamica nella *Mécanique Analitique* del Lagrange.
L'Autore considera la scomposizione della forza agente su un punto materiale che si muove lungo una generica linea curva nelle sue componenti tangenziale e normale (cioè secondo il cosiddetto riferimento intrinseco):

> La *Mécanique* d'Euler, qui a paru en 1736, et qu'on doit regarder comme le premier grand ouvrage où l'Analyse ait été appliquée à la science du mouvement, est encore toute fondée sur ces formules; mais on les a presque abandonnées depuis, parce qu'on a trouvé une manière plus simple d'exprimer l'effet des forces accéleratrices sur le mouvement des corps. (...)
> Elle consiste à rapporter le mouvement du corps, et les forces qui le sollicitent, à des directions fixes dans l'espace. (...)
> Cette manière d'étabilir les équations du mouvement d'un corps animé par des forces quelconques, en le réduisant à des mouvements rectilignes, est, par sa simplicité, préférable à toutes les autres; elle aurait du se présenter d'abord, mais il parait que Maclaurin est le premier quit l'ait employée dans son Traité des Fluxions, qui a paru en anglais en 1742; elle est maintenant universellement adoptée.

Riporto anche un brano tratto dal classico testo del Mach [12]

> I fondamenti della meccanica analitica sono stati posti da Eulero.
> Egli però era ancora legato ai vecchi metodi geometrici, come prova il suo procedimento di scomposizione di tutte le forze agenti nel moto curvilineo, nelle componenti tangenziali e normali.
> Il merito di importanti progressi spetta a Maclaurin, che scompone tutte le forze in tre direzioni invariabili, di modo che i calcoli guadagnano in simmetria e chiarezza.

Non posso in questa conferenza trattare altri fraintendimenti storici dell'opera di Eulero ma desidero correggere almeno quello appena ricordato, che gli rimprovera l'eccessivo attaccamento ai vecchi metodi sintetici-geometrici!
Al contrario sarà precisamente di Eulero il merito di avere ritrascritto la meccanica newtoniana nel pregnante simbolismo leibniziano dell'analisi infinitesimale.
La più recente critica storica ha infatti stabilito che la prima volta in cui le cosiddette *equazioni di Newton*

$$F_x = M \cdot a_x$$
$$F_y = M \cdot a_y$$
$$F_z = M \cdot a_z$$

sono state esplicitamente proposte come equazioni generali per problemi meccanici di ogni genere (discreti e continui, estendendo la legge ad elementi infinitesimi) è il 1750, anno della composizione della memoria di Eulero *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* [E 3], pubblicata nel 1752.
Invece la prima introduzione, nello studio del moto, di un sistema di coordinate cartesiane fu operata da Jean Bernoulli nel 1742.
Nel libro del Maclaurin non appare alcun riferimento a coordinate cartesiane: tuttavia l'errore di Lagrange è ripetuto, di citazione in citazione, in quasi tutti i libri di storia della meccanica!

Le leggi del moto di Newton e i due principi di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto

Per una migliore comprensione di quanto verrà esposto deduciamo i due principi di conservazione dalle leggi del moto di Newton.

Nelle moderne trattazioni della meccanica, indicando la quantità di moto (prodotto della massa per la velocità) con il vettore:

$$\vec{p} = M \cdot \vec{v}$$

la seconda legge di newton si scrive, come è ben noto, nella forma seguente:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

ove il punto sopra il segno di vettore indica la derivata temporale.

Consideriamo un insieme di *n* punti materiali.

Indichiamo con $\vec{F}_{ik}$ la forza che il punto *i* esercita su *k*, e con $\vec{F}_{ki}$ la forza che il punto *k* esercita su *i*.
Per la terza legge di Newton si ha:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$$

Applicando la seconda legge di Newton ad ogni particella del sistema e sommando membro a membro le equazioni ottenute si otterrà a primo membro la derivata temporale della quantità di moto complessiva e a secondo membro la somma vettoriale delle sole forze esterne (in quanto le forze interne si annullano a due a due: stiamo trattando il caso di un sistema costituito da un numero finito di punti materiali).

$$\longrightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}_e}$$

L'equazione ottenuta esprime **la legge della conservazione della quantità di moto per sistemi isolati**: infatti, in assenza di forze esterne, è costante la quantità di moto del sistema.

Introdotto il concetto di momento cinetico (o momento della quantità di moto) L di un punto materiale in A rispetto ad un punto fisso O quale prodotto vettore:

$$\vec{L} = (A - O) \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

derivando rispetto al tempo i due membri dell'equazione si ottiene al secondo membro il momento statico della forza:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{p}} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{p}} = \vec{r} \wedge \vec{F} = M$$

[essendo $\dot{r}$ e $\vec{p}$ paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo].

Considerando un sistema di n punti materiali, sommando membro a membro le equazioni ottenute per ogni particella si otterrà a primo membro la derivata temporale del momento della quantità di moto complessivo e a secondo membro la somma vettoriale dei momenti delle sole forze esterne (in quanto le forze interne - in un sitema costituito da un numero finito di punti materiali - si annullano a due a due).

$$\longrightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{est}}$$

L'equazione ottenuta esprime **la legge della conservazione del momento della quantità di moto per sistemi isolati**: infatti, in assenza di momenti dovuti a forze esterne, è costante il momento della quantità di moto del sistema.

Questa legge non appare mai né nei *Principia* di Newton né nel classico lavoro di Huygens sulle oscillazioni. Appare invece in un'importante memoria di Jacques Bernoulli del 1703 il quale affrontò il problema del pendolo composto riducendolo (tramite il principio della leva) ad un problema di statica e facendo quindi uso di quello che sarà chiamato *Principio di D'Alembert*.

Le due leggi cardinali della meccanica e il postulato delle tensioni

Le due leggi ottenute sono state ottenute come *corollari* delle tre leggi di Newton per sistemi di punti materiali: per i corpi *estesi* esse al contrario devono essere poste quali principi indipendenti ([4]).

Fu Eulero a comprendere che l'insieme di questi due principi (le cosiddette *equazioni cardinali*) costituisce la fondazione dell'intera meccanica.
Esse sono sufficienti a determinare il moto dei corpi rigidi.

Applicandole al caso di sistemi isolati (cioè tali per cui $\vec{F}_{est} = \vec{0}$ e $\vec{M}_{est} = \vec{0}$) si ottengono, come gia visto, i due principi di conservazione della quantità di moto e del momento della quantità di moto.

Applicandole a sistemi in quiete (cioè tali per cui costantemente $\vec{p} = \vec{0}$ ed $\vec{L} = \vec{0}$) si ottengono le cosiddette **equazioni cardinali della statica** (sempre necessarie all'equilibrio e pure sufficienti a determinare la statica di corpi rigidi):

$$\vec{F}_{est} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{est} = \vec{0}$$

Se le equazioni cardinali della statica valgono per *ogni* porzione di corpo deformabile (traducendo in forze, secondo il cosiddetto *postulato delle tensioni*, le azioni delle parti contigue) esse sono condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di tutti i corpi.

Il *nuovo principio* (1750) ovvero la trascrizione differenziale della meccanica newtoniana

Nella memoria già citata *Decouverte d'un nouveau principe de mécanique* [E 3], Eulero chiama "principio generale e fondamentale di tutta la meccanica" (*principe géneral et fondamental de toute la mécanique*) la scrittura moderna della seconda legge della meccanica, come comunemente attribuita al Newton.
Scrive la formula

$$2 \cdot M \cdot ddx = F \cdot dt^2$$

aggiungendo che in questa sola formula sono *confermati* tutti i principi della meccanica.
Per l'utilizzo della stessa *"si dovrà solo rapportarla a tre piani fissi, tra loro perpendicolari,"* ed indicando con *P,Q, R* le componenti normali ai tre piani e con *x, y, z* le distanze dai piani stessi si ottengono le tre formule:

$$\text{I.}\quad 2 \cdot M \cdot ddx = P \cdot dt^2 \qquad \text{II.}\quad 2 \cdot M \cdot ddx = Q \cdot dt^2 \qquad \text{III.}\quad 2 \cdot M \cdot ddx = R \cdot dt^2$$

Eulero aggiunge

> le principe que je viens d'établir contient tout seul les principes qui peuvent conduire à la connaissance du mouvement de tous les corps, de quelque nature qu'ils soient

Nella memoria le formule sono applicate anche ad elementi infinitesimi, sostituendo *M* con *dM* e *F* con *dF*.

Nella memoria Eulero riprende le equazioni del corpo rigido ottenute nel suo trattato *SCIENTIA NAVALIS* ove aveva *ipotizzato* l'esistenza di tre assi tali per cui nel moto rotatorio intorno ad uno di essi, il momento della quantità di moto totale è parallelo all'asse stesso (e quindi alla velocità angolare $\vec{\omega}$):

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

la costante *I* è detta, come noto, *momento d'inerzia*.
Con l'ausilio del *nuovo principio della meccanica* Eulero prova la correttezza dell'ipotesi.

C.Wilson, [19], come già C. Truesdell, esclude che Eulero abbia mai considerato la II equazione cardinale della dinamica come una conseguenza della prima.
Eulero volle studiare il moto rotatorio con analogia con quello lineare e vi riuscì sostituendo forze, masse ed accelerazioni rispettivamente con momenti di forze, momenti

di inerzia ed accelerazioni angolari, ottenendo equazioni nelle quali apparissero da un lato cause e dall'altro lato effetti.
Potremmo dire che i brani studiati suggeriscono la seguente interpretazione: Eulero nel 1750 considerava **le due leggi quali espressioni di un unico generalissimo principio** che assumeva due forme diverse quando applicato allo studio dei moti lineari e allo studio dei moti rotatori.

Il principio di continuità leibniziano in Eulero

La ricerca scientifica di Eulero si svolge sempre seguendo un fine unificatorio: Eulero non si placa sino a che la soluzione di un caso particolare non si inquadri nella soluzione riguardante il problema più generale.
Eulero svolge nel campo della meccanica quel passaggio con continuità da un concetto all'altro che Leibniz aveva teorizzato essere il fine proprio essenziale della riflessione scientifica-filosofica.

In geometria, ad esempio, è vano paragonare retta e curva direttamente tra di loro: è necessario invece cogliere la regola unica che può generare entrambe.
Possiamo dire che se il calcolo differenziale determina le condizioni perché si formi una certa grandezza, il calcolo integrale permette di costruire questa grandezza note le condizioni del suo generarsi.
Esso permette, ad esempio di far nascere una curva dalla legge della sua direzione (o dalla conoscenza dell'insieme geometrico dei centri dei suoi cerchi osculatori).

Nella lettera a Bourguet del 5 agosto 1715 [7] Leibniz scrive:

> *"Molti di coloro che in sede matematica hanno filosofato sul punto e sull'unità sono caduti in errore per non aver distinto fra la risoluzione in concetti e la scomposizione in parti. Non sempre le parti sono più semplici del tutto, pur essendone sempre più piccole".*

L'annullarsi delle quantità non annulla infatti i rapporti qualitativi.

La catenaria presenta, emblematicamente, il potere nuovo dell'analisi infinitesimale: per essa erano già note le *condizioni*, cioè i rapporti geometrici tra i punti della fune in equilibrio, rapporti che sussistevano anche quando quantitativamente gli elementi erano annullati: mancava invece lo strumento che dalla conoscenza di queste condizioni sapesse ricostruire la grandezza.

Leibniz presenta il *principio di continuità* (per cui elementi diversi sono veramente osservati sotto un concetto superiore quando è possibile il passaggio continuo dall'uno all'altro elemento) non solo come base della sua analisi, ma anche come principio metodico del pensiero (*nostra hac analysi infiniti ex intimo philosophiae fonte derivata*: questa nostra analisi dell'infinito che deriva dalla fonte più intima della filosofia).
Nell'antica geometria greca tanti sono i problemi quanti sono i casi sotto cui lo stesso oggetto può essere riguardato: il principio leibniziano della continuità è elemento fondatore della scienza moderna, la quale ricerca non la separazione dei concetti ma la legalità del passaggio continuo dall'uno all'altro (vedi [18]).

Il cuore tematico di questa memoria è la costruzione della *teoria della trave* che ha storicamente richiesto , come vedremo, il passaggio dallo studio della fune a quello della trave.
Lo studioso sa che ogni sviluppo di teoria scientifica richiede la comprensione profonda di quello che, implicito e nascosto nella teoria conosciuta, deve essere invece esplicitamente dichiarato in una teoria più generale: è questa comprensione che permette la *continuità* concettuale .
Nel nostro caso la *teoria della fune* che Eulero eredita dai predecessori (soprattutto Jacques Bernoulli) non permetteva di rilevare la generale necessità di verificare l'equilibrio statico imponendo separatamente equilibrio delle forze ed equilibrio dei momenti.
L'estensione della teoria ha pertanto seguito lo sviluppo che ha rifondato l'intero edificio della meccanica.

Interpretazione fisica del funzionamento di fune e trave

Richiesta la coerenza tra le particelle materiali la fune adatta la sua forma seguendo puri equilibri di forze esterne.
Questa composizione di forze deve ammettere una risultante che segue la tangente alla forma finale, in quanto la fune è in grado di offrire unicamente quella resistenza che si oppone alla separazione delle parti ma non può opporsi ad effetti che ne provocano l'inflessione.
In questo caso è equivalente imporre in ciascun punto DELLA FUNE l'equilibrio delle forze (in quanto forze piane equilibrate devono necessariamente convergere in un punto che per ipotesi deve coincidere con quello considerato sulla fune) o imporre in ciascun punto l'annullarsi dei momenti (in quanto la risultante delle forze precedenti il punto considerato deve passare per esso).

Dicendo che la trave ha forma propria si vuole indicare invece la possibilità di resistenza ad effetti di inflessione.
La forza in generale non soltanto non è diretta come la tangente (cioè ammette in genere una componente normale) ma è addirittura esterna alla trave stessa.
Il paradosso è risolto dalla moderna teoria dello stato tensionale: le forze sono tutte mutuamente scambiate nel dominio della sezione: è la risultante di esse ad essere esterna e nella scrittura delle equazioni di equilibrio per elementi considerati monodimensionali è lecita la sostituzione di forze superficiali con la loro risultante.

E' solo nel 1771 che l'azione mutuamente scambiata in una generica sezione di una trave elastica cessa di essere considerata tangente e di essere localizzata sull'asse della trave.
Eulero infatti, dopo oltre un quarantennio di riflessioni, **assume le due leggi cardinali della statica come leggi indipendenti rinunciando a specificare a priori *posizione* e *direzione* dell'azione interna.**

Presento una sintesi grafica (Fig. 1) delle quattro tappe fondamentali nello sviluppo della teoria della trave:
- 1694: soluzione di Jacques Bernoulli del problema dell'*elastica*: l'azione interna è una coppia, proporzionale alla curvatura;
- 1698: equazioni dell'equilibrio di un filo soggetto a generiche condizioni di carico: l'azione interna è una forza tangente alla fune;
- 1728: unificazione di catenaria ed elastica (EQUILIBRIO DEI MOMENTI): la teoria comprende come casi particolari i due precedenti;
- 1771: teoria completa della trave: l'azione interna ha anche una componente normale.

RICHIEDE DUE EQUAZIONI DISTINTE EQ. MOMENTI / EQ. FORZE

FORMA PROPRIA: ANCHE SE MONODIMENSIONALE L'AZIONE INTERNA NON E' TANGENTE.

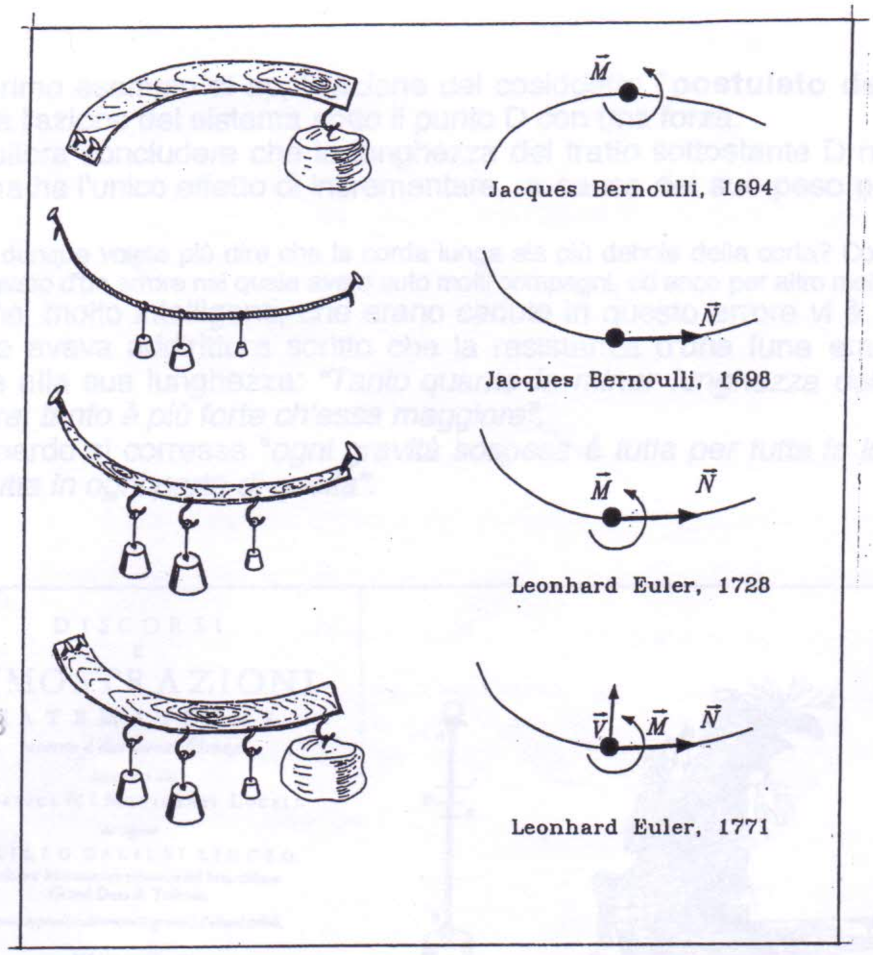


Fig. 1 - Tappe fondamentali nello sviluppo della *teoria della trave*

Il fondamentale contributo di Galileo alla nascita della *Scienza delle Costruzioni*

Galileo, ritenuto unanimamente il fondatore della scienza moderna, è anche il fondatore della Scienza delle Costruzioni: a Galileo è dovuto il concetto stesso che schematizza l'azione resistente di una struttura: la riduzione in termini di forze nella sezione presa in considerazione.

I suoi contributi fondamentali sono contenuti nel suo trattato più maturo: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del 1638.

Nel dialogo della seconda giornata, Galileo vuole correggere l'opinine diffusa per cui si dice *"una corda lunghissima esser molto meno atta a reggere un gran peso che se fusse corta"* (Fig, 2).

Assunto D come il punto in cui la rottura dovesse avvenire Galileo scrive che la causa della rottura è la seguente:

> perché la corda, in quella parte non era potente a reggere, v.g., cento libbre di peso, quanto è la parte DB con la pietra C

[il carico di rottura è cioè inferiore a 100 libbre equivalenti al peso C e al peso proprio della fune nel tratto sottostante D].

> Adunque tutta volta che una tal corda nella parte D venisse violentata dalle medesime cento libbre di peso, ella lì si strapperebbe.

Questo è il primo esempio di applicazione del cosiddetto **"postulato delle tensioni"**: egli rimpiazza l'azione del sistema sotto il punto D con una forza.
Galileo può allora concludere che la lunghezza del tratto sottostante D non influenza la resistenza (ma ha l'unico effetto di incrementare, a causa del suo peso proprio, il carico portato).

> (...) come dunque volete più dire che la corda lunga sia più debole della corta? Contentatevi dunque d'esser cavato d'un errore nel quale avete auto molti compagni, ed anco per altro molto intelligenti (...)

Tra le persone, molto intelligenti, che erano cadute in questo errore vi è pure il grande Leonardo che aveva addirittura scritto che la resistenza d'una fune era inversamente proporzionale alla sua lunghezza: *"Tanto quanto la minor lunghezza della corda entra nella maggiore, tanto è più forte ch'essa maggiore"*.
Poi però Leonardo si corresse *"ogni gravità sospesa è tutta per tutta la lunghezza della corda, ed è tutta in ogni parte di quella"*.

Fig. 2 - Frontespizio e disegni tratti dal capolavoro (letterario e scientifico) di Galileo

Sempre nella seconda giornata è riportata l'osservazione riguardo al fatto che in una trave, la resistenza *"ben che grandissima contro alla forza di chi per diritto gli tira, minore per lo più si osserva nel violentargli per traverso"* (Fig. 2).
In altre parole una trave resiste assai più se il carico agisce assialmente (in generale per trazione) invece di agire perpendicolarmente all'estremo libero della stessa trave incastrata come una mensola.
Galileo imposta il suo calcolo nella fiducia che gli siano suficienti le leggi della leva, ipotizzando una distribuzione uniforme delle tensioni nella sezione: il comportamento della mensola è ridotto ad una leva angolare ove il fulcro è l'intradosso della base all'incastro.
Il problema è quindi affrontato esclusivamente in chiave di **equilibrio dei momenti**.

Equilibrio della fune e della trave

Prima di procedere all'esame dei documenti storici che dopo Galileo hanno portato allo sviluppo della moderna teoria della trave - fondamento della meccanica strutturale - ricaviamo con procedimento moderno:
- l'equazione della catenaria (cioè di un filo soggetto a speciali carichi verticali);
- le più generali equazioni di equilibrio di un filo soggetto a forze generiche;
- le equazioni di equilibrio della trave in forma differenziale e globale.

L'equazione differenziale della funicolare e l'equazione della catenaria

Otteniamo l'equazione della catenaria partendo dall'equazione differenziale della funicolare per carichi verticali.
Quest'ultima equazione rappresenta la trascrizione in termini infinitesimi di una costruzione ben nota ai tecnici: il *poligono funicolare*.
Come noto dalla teoria del poligono funicolare, la tensione in ogni punto della fune (ad esempio in *A*) è misurata dalla proiettante corrispondente (*ap*).
H èla componente orizzontale della tensione che è costante ed è dovuta unicamente all'inclinazione delle reazioni, non portando il carico verticale alcun contributo ad essa.
Se φ è l'inclinazione della fune in A, scriviamo l'espressione che dà la sua tangente:

$\frac{dy}{dx}=\frac{\overline{ao}}{H}$. Differenziando ambo i membri si ottiene:

$$y''=\frac{1}{H}\cdot\frac{d(\overline{ao})}{dx}=-\frac{q}{H}$$

in quanto il differenziale $d(\overline{ao})$ rappresenta la diminuzione infinitesima della lunghezza del segmento *ao* ed è pari a *-qdx*.
Se q è costante si ha per la funicolare l'equazione di una **parabola**:

$$y''=-\frac{q}{H}\xrightarrow{q\text{ costante}}y=-\frac{q}{2H}x^2+C_1x+C_2$$

La Fig. 3 mostra la costruzione corrispondente al caso discreto di forze verticali uguali, equispaziate sull'orizzontale.
Le forze verticali, se devono rappresentare il peso della fune in posizione equilibrata hanno un valore tanto maggiore quanto maggiore è l'angolo di inclinazione φ della fune.
La figura costruisce la catenaria come il poligono funicolare di tali forze.

Passando al continuo, se g è il peso ad unità di lunghezza della fune, si ha $q(x)=\frac{g}{\cos\varphi}$

$$y''=-\frac{q}{H}\xrightarrow{q=\frac{g}{\cos\alpha}}y''=-\frac{g}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{H}\Rightarrow y''+\frac{g}{H}\cdot\sqrt{1+y'^2}=0$$

in quanto: $\cos\alpha=\frac{dx}{ds}$ e $ds=\sqrt{1+y'^2}$

La soluzione è:

$$y=y_0-\frac{H}{g}\cdot\left[\cosh\frac{g}{H}(x-x_0)-1\right]$$

Operando una traslazione di assi per cui: $Y = y - y_0 + \lambda$ e $X = x - x_0$, e ribaltando Y si ottiene la forma canonica

$$Y = \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{X}{\lambda}} + e^{-\frac{X}{\lambda}} \right) = \lambda \cdot \cosh \frac{x}{\lambda}$$

avendo posto

$\lambda = \dfrac{H}{g}$

Per questa funzione, misurando la lunghezza degli archi a partire dal punto di ascissa nulla (ordinata minima) e nel verso delle ascisse crescenti è data da:

$\boxed{s = \lambda \cdot \mathrm{senh} \dfrac{X}{\lambda}}$. Rileviamo dunque che $\boxed{s = \lambda \cdot y'}$

Questo notevole risultato (la tangente è proporzionale alla lunghezza dell'arco), immediatamente rilevabile dalla costruzione indicata nella figura può servire per scrivere un'equazione del primo odine ed ottenere in altro modo l'equazione della catenaria.

Trascurando nello sviluppo in serie le potenze superiori alla terza la catenaria è assimilabile alla parabola:

$Y = \lambda \cdot \cosh \dfrac{X}{\lambda} \cong \lambda + \dfrac{X^2}{2\lambda}$ (La somiglianza tra le due curve è tanto più pronunciata quanto più $\lambda = \dfrac{H}{g}$ è grande).

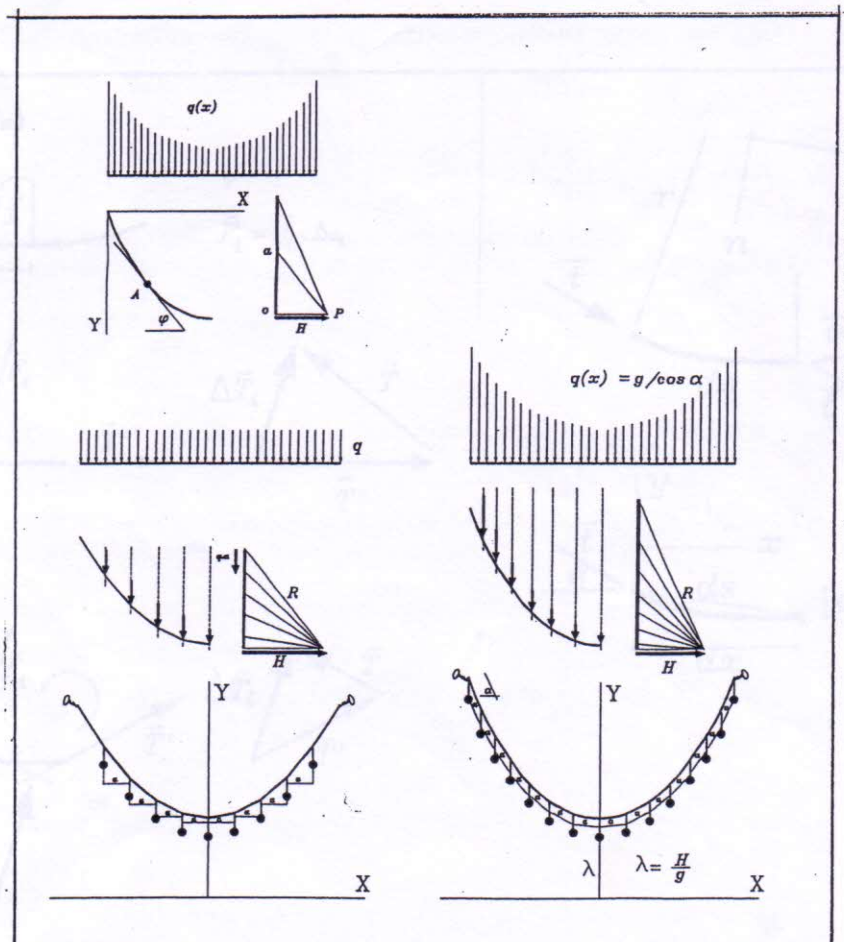


Fig. 3 - Funicolare parabolica e *catenaria*

Le equazioni di equilibrio in un filo soggetto a forze generiche

Consideriamo un tratto di filo in corrispondenza di un punto *i*.
La costruzione nella Fig. 4 mostra che le tensioni T e T' nei due tratti di filo che si connettono in *i*, sono determinate univocamente in funzione della forza F_i note le direzioni dei due tratti di filo stesso.
Implicitamente infatti ritenere la tensione tangente al filo equivale a soddisfare l'equilibrio dei momenti e la chiusura del triangolo assicura l'equilibrio delle forze.
La forza F_i è equilibrata dal vettore differenza delle due tensioni T e T'.

$$\vec{F}_i + \Delta\vec{T}_i = 0$$

La forza Fi dipende dalla legge di distribuzione dei carichi lungo il filo che è una funzione vettoriale della coordinata curvilinea s : $f(s)$ [essa, nel paragrafo precedente, riguardando il caso di carichi tutti verticali è stata espressa nella forma $q(x)$].
Nel nostro caso discreto si ha:

$$\vec{F}_i = \vec{f}_i \cdot \Delta s_i$$

Si ottiene allora la seguente equazione vettoriale di equilibrio:

$$\vec{f}_i + \frac{\Delta\vec{T}_i}{\Delta s_i} = 0$$

Come mostra la figura, inoltre, solo la scomposizione lungo le due direzioni convergenti in *i* dà luogo anche all'equilibrio dei momenti: ogni altra scomposizione crea un sistema equivalente ad una coppia e quindi non equilibrato.

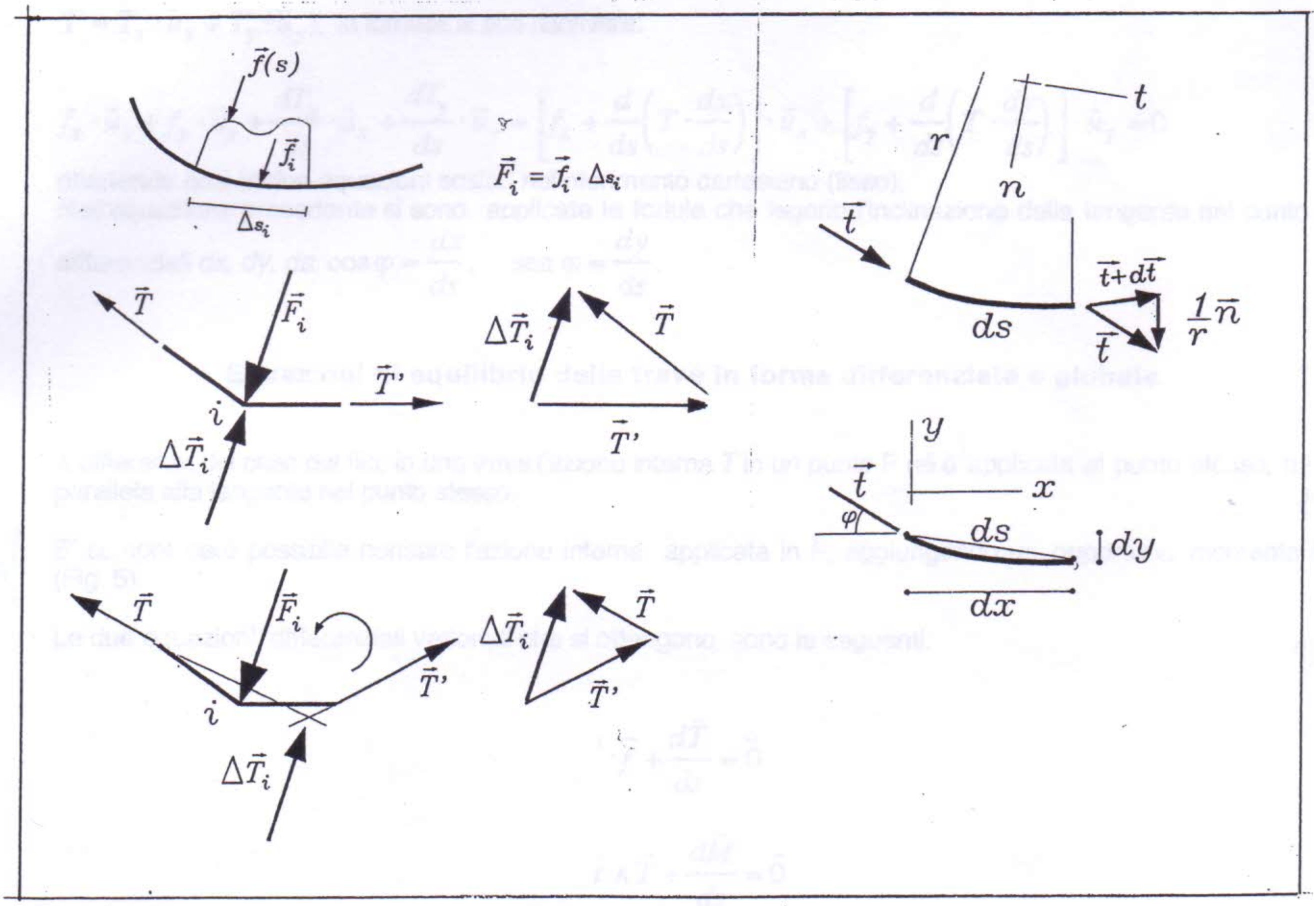


Fig. 4 - Equilibrio di un filo. Sistemi di riferimento intrinseco e cartesiano

Traducendo in termini infinitesimi si ottengono le seguenti due leggi:
- la tensione T in un punto del filo è tangente al filo nello stesso punto (è nullo il prodotto vettore di T per il versore tangente t)

$$\vec{t} \wedge \vec{T} = 0$$

- per questa tensione T vale la seguente equazione indefinita di equilibrio:

$$\boxed{\vec{f} + \frac{d\vec{T}}{ds} = 0}$$

Introdotti i vettori $\vec{t}$ ed $\vec{n}$ diretti come la tangente e la normale (per cui $\vec{T} = T \cdot \vec{t}$), la formula si può riscrivere:

$$f_t \cdot \vec{t} + f_n \cdot \vec{n} + \frac{dT}{ds} \cdot \vec{t} + T \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = f_t \cdot \vec{t} + f_n \cdot \vec{n} + \frac{dT}{ds} \cdot \vec{t} + \frac{T}{r} \cdot \vec{n} = \left(f_t + \frac{dT}{ds}\right) \cdot \vec{t} + \left(f_n + \frac{T}{r}\right) \cdot \vec{n} = 0$$

ottenendo così le due equazioni scalari nel riferimento intrinseco (mobile sulla curva).
Queste equazioni furono ottenute da Jacques Bernoulli nel 1698.

Nell'equazione precedente si è applicata la formula di Frenet $\boxed{\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{r} \cdot \vec{n}}$, essendo r il raggio di curvatura nel punto.

Introdotto i vettori di lunghezza unitaria $\vec{u}_x$ ed $\vec{u}_y$ diretti come gli assi coordinati (per cui $T = T_x \cdot \vec{u}_x + T_y \cdot \vec{u}_y$), la formula si può riscrivere:

$$f_x \cdot \vec{u}_x + f_y \cdot \vec{u}_y + \frac{dT_x}{ds} \cdot \vec{u}_x + \frac{dT_y}{ds} \cdot \vec{u}_y = \left[f_x + \frac{d}{ds}\left(T \cdot \frac{dx}{ds}\right)\right] \cdot \vec{u}_x + \left[f_y + \frac{d}{ds}\left(T \cdot \frac{dy}{ds}\right)\right] \cdot \vec{u}_y = 0$$

ottenendo così le due equazioni scalari nel riferimento cartesiano (fisso).
Nell'equazione precedente si sono applicate le forlule che legano l'inclinazione della tangente nel punto ai differenziali dx, dy, ds: $\cos\varphi = \frac{dx}{ds}$, $\quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{dy}{ds}$.

Equazioni di equilibrio della trave in forma differenziale e globale.

A differenza del caso del filo, in una trave l'azione interna T in un punto P né è applicata al punto stesso, né è parallela alla tangente nel punto stesso.

E' sempre però possibile pensare l'azione interna applicata in P, aggiungendo un opportuno momento M (Fig. 5).

Le due equazioni differenziali vettoriali che si ottengono sono le seguenti:

$$\vec{f} + \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{0}$$

$$\vec{t} \wedge \vec{T} + \frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{0}$$

A meno che M non sia costante, T non è quindi in generale parallelo all'asse della trave.
Scomponendo T nelle sue due componenti N e V parallela e normale all'asse della trave, da queste equazioni differenziali otteniamo le tre equazioni indefinite di equilibrio nelle componenti N, V e in M.

Per travi rettilinee si hanno le equazioni della teoria tecnica della trave:

$$\frac{dN}{dz}+p=0$$

$$\frac{dV}{dz}+q=0$$

$$\frac{dM}{dz}=V$$

Queste equazioni sono state ottenute da Eulero nel 1771 [E 4].

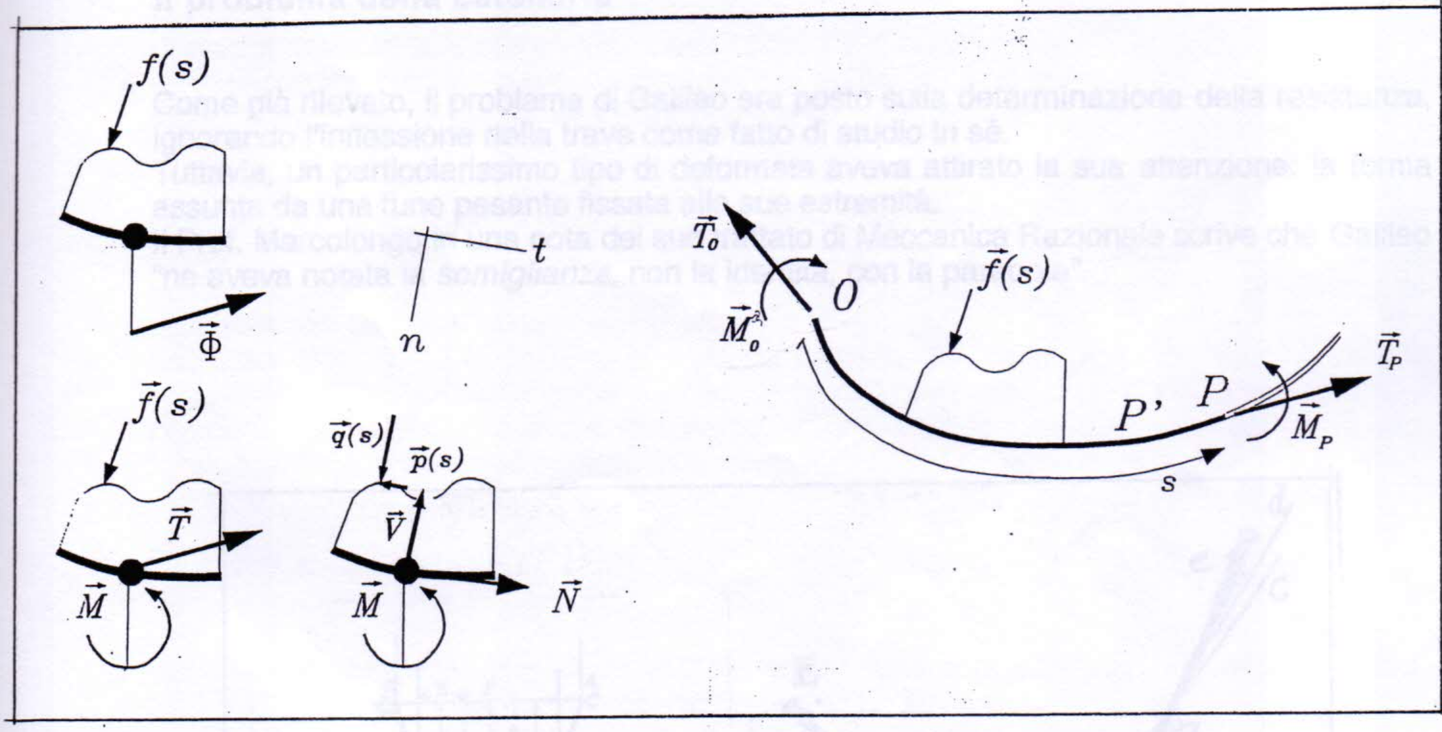


Fig. 5 - Azione interna in una trave e condizioni di equilibrio globale

Le equazioni indefinite di equilibrio devono implicare le equazioni cardinali per ogni porzione finita da un punto origine O fino ad un generico punto P di ascissa s.
ricordiamo che

$$\vec{t}=\frac{d\vec{P}}{ds}$$

Integrando la prima equazione da O a P si ha:

$$\vec{T}(0)-\vec{T}(s)+\int_0^s \vec{f}\cdot ds=\vec{0}$$

E' quindi verificata la prima equazione cardinale. T(s) risulta opposta al risultante di tutte le forze esterne agenti alla sinistra del punto.

Integrando la seconda equazione da O a P si ha:

$$\vec{M}(0)-\vec{M}(s)-(O-P)\wedge\vec{T}(0)-\int_0^s (P'-P)\wedge\vec{f}(P')\cdot ds=\vec{0}$$

ove P' é il vettore posizione del generico punto nel tratto da O a P.
E' quindi verificata la seconda equazione cardinale. M(s) risulta opposta al momento risultante di tutte le forze esterne agenti alla sinistra del punto.

La potenza e l'espressività dell'analisi vettoriale ci hanno permesso di ottenere in pochi passaggi la verifica dell'equilibrio globale partendo dall'equilibrio locale in termini infinitesimi: è precisamente questo accordo tra le due formulazioni che Eulero dichiara di lasciare agli studiosi quale *"dono non ingrato"* [E 5].

Il problema della catenaria

Come già rilevato, il problema di Galileo era posto sulla determinazione della resistenza, ignorando l'inflessione della trave come fatto di studio in sé.
Tuttavia, un particolarissimo tipo di deformata aveva attirato la sua attenzione: la forma assunta da una fune pesante fissata alle sue estremità.
Il Prof. Marcolongo in una nota del suo trattato di Meccanica Razionale scrive che Galileo "ne aveva notata la *somiglianza*, non la identità, con la parabola".

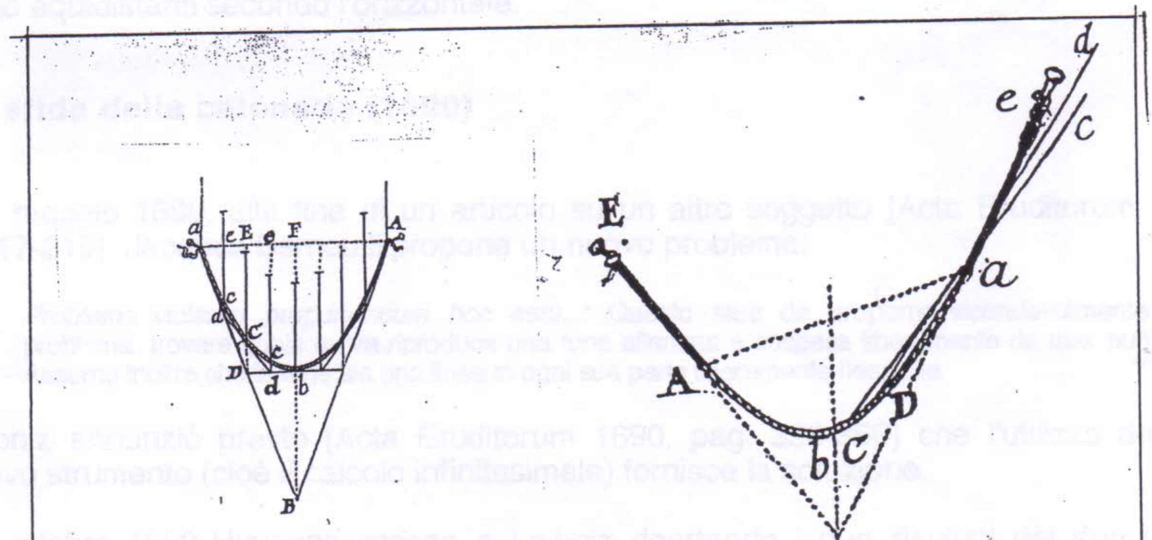


Fig. 6 - La funicolare parabolica e il teorema di Pardies

Il gesuita Pardies in un lavoro pubblicato postumo nel 1673 aveva dimostrato il teorema per cui l'intersezione delle due tangenti tracciate per i due estremi di ogni tratto di fune è sulla verticale passante per il baricentro del tratto stesso.
Vedremo che questa assunzione sarà la base della soluzione di Leibniz.

Il teorema è fondato sulla constatazione che la forma assunta da una linea perfettamente flessibile rimaneva immutata sostituendo le parti sopra ***A*** e ***a*** con forze convenienti dirette lungo la tangente negli stessi punti (FIg. 6).
Questa osservazione sarà invece la chiave della soluzione di Jean Bernoulli.

L'equilibrio allora richiede che l'intersezione di queste due tangenti (punto di passaggio della forza equilibrante) sia anche il punto di passaggio della forza risultante dei carichi.
Se i carichi sono uguali e uniformemente spaziati sull'orizzontale, **questo solo teorema basta a risolvere il problema**: la curva è una parabola.
In questo caso la verticale condotta per il baricentro passa per il punto medio di *aF*.
E' la parabola l'unica curva geometrica per cui le tangenti per *a* e per *b* si incontrano lungo la verticale condotta per il punto medio del segmento *aF*.

Huygens, in un lavoro giovanile del 1646, (un trattato inviato al Padre Mersenne quando aveva 17 anni), aveva formulato il principio per cui la fune pesante assume quella posizione per cui il centro di gravità è il più basso possibile e aveva verificato che la parabola non soddisfa questa condizione.
Vedremo che nel 1744 Eulero, con il suo metodo dei massimi e dei minimi, otterrà l'equazione della catenaria come conseguenza diretta di questo principio di estremo.
Huygens nel 1646 aveva anche dimostrato che si ottiene una parabola quando i pesi sono equidistanti secondo l'orizzontale.

La sfida della catenaria (1690)

Nel maggio 1690, alla fine di un articolo su un altro soggetto [Acta Eruditorum 1690, p.217-219] Jacques Bernoulli propone un nuovo problema:

> *Problema vicissim proponendum hoc estu...*: Questo sarà da proporre vicendevolmente come problema: trovare quale curva riproduca una fune allentata e sospesa liberamente da due punti fissi. Assumo inoltre che la fune sia una linea in ogni sua parte liberamente flessibile.

Leibniz annunziò presto [Acta Eruditorum 1690, pag. 358-360] che l'utilizzo del suo nuovo strumento (cioè il calcolo infinitesimale) fornisce la soluzione.

Il 9 ottobre 1690 Huygens scrisse a Leibniz riportando i due risultati del suo lavoro giovanile.
Nella risposta del 2 marzo 1691 Leibniz avanza il sospetto che il problema non sia risolubile senza l'ausilio del calcolo infinitesimale e annuncia che Jean Bernoulli l'ha risolto proprio giovandosi di questo.
Jean Bernoulli riporterà in una sua lettera questa pregnante opinione di leibniz: *"Galileo è certamente la persona più chiaroveggente dei suoi tempi. Però, **non possedendo la nostra nuova analisi**, egli congetturò erroneamente che la curva catenaria fosse una parabola e la curva di più rapida discesa un arco di cerchio"*.

Anche la soluzione di Huygens del giugno 1691 conduceva solo all'espressione della differenza delle coordinate di due punti prossimi sulla curva: $x_k - x_{k-1}$ $y_k - y_{k-1}$ [cioè coglieva, nella curva, la legge del suo generarsi senza riuscire a risalire - mancando Huygens dello strumento del calcolo infinitesimale - alla funzione che ne deriva].

Jacques aveva lanciato la sfida convinto di arrivare in breve alla soluzione grazie alle nuove tecniche del calcolo differenziale.
Jean, i suo fratello minore, arrivò per primo alla soluzione e si divertì a ironizzare sulla cosa:

> Il problema era davvero difficile: mi occupò un'intera notte.
> Il mattino però corsi da mio fratello e gli dissi "Non tormentarti più: Galileo aveva torto. Non è una parabola" (liberamente adattato da una lettera del 1718).

L'ironia deriva dal fatto che egli raccontava di aver risolto in una notte un problema su cui Jacques si era inutilmente arrovellato per un anno.

Newton e la scuola inglese non si interessarono della questione a differenza di quanto avverrà in occasione dell'altro famoso problema della brachistocrona del 1697 per il quale era giunta una soluzione anonima dall'inghilterra in cui tutti però avevano riconosciuto l'"artiglio del leone", cioè la mano di Newton.

Le due soluzioni al problema della catenaria (1691)

Nel 1691 sono pubblicate le tre soluzioni di Jean Bernoulli, il fratello di Jacques, di Leibniz e di Huygens (in realtà Huygens, come già detto, non riuscì propriamente nell'impresa).

Jean Bernoulli dà, senza dimostrazione, due costruzioni della catenaria.
Quindi elenca tredici proprietà della curva ricavata, la prima delle quali che costituisce la chiave della sua soluzione: $\frac{dy}{ds} = \frac{s}{a}$

La proprietà per la quale la tangente è proporzionale alla lunghezza dell'arco può essere ottenuta ricalcando l'elegante dimostrazione di Jean Bernoulli (Fig. 7).
Si tratta di fare l'equilibrio alla traslazione riferendoci ad un tratto finito di fune di lunghezza arbitraria s, avente un estremo nel punto più basso B.
La tensione T nell'altro estremo avrà:
- componente orizzontale costante: $T \cdot \text{sen}\,\vartheta = k \cdot a$
- componente verticale proporzionale a s: $T \cdot \cos\vartheta = k \cdot s$

Dividendo membro a membro le due equazioni si ottiene:

$$\frac{\text{sen}\,\vartheta}{\cos\vartheta} = \tan\vartheta = \frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$$

La chiave della soluzione di Leibniz è contenuta nella sua lettera a Huygens del 14 settembre 1694, da cui è tratto il disegno esplicativo nella figura 7 (tratto da [5]).
Si tratta del teorema che esprime l'equilibrio statico di un tratto finito di fune con un estremo nel punto più basso A:
Se T è l'intersezione delle tangenti in A e in un punto generico C, allora la distanza $\overline{AT}$ è anche la distanza tra l'asse della catenaria e il centro di gravità dell'arco AC.

Nella figura di Leibniz troviamo espressa anche l'altra proprietà: Leibniz scrive che, posto *AR* pari alla lunghezza dell'arco *s*, allora i due triangoli CBT e ©AR sono simili (da questo discende che in ogni punto:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{a}$$

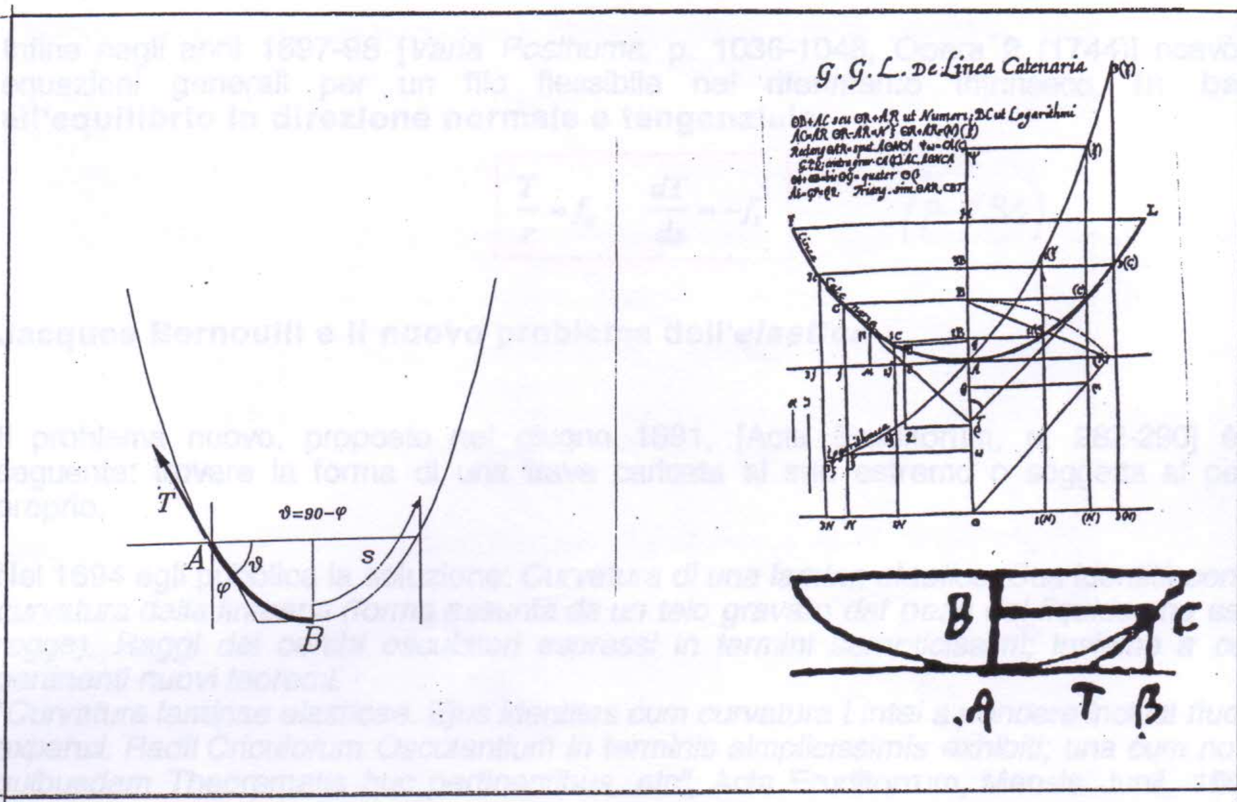


Fig. 7 - La catenaria: le chiavi delle soluzioni di Jean Bernoulli e di Leibniz

Jacques Bernoulli e le equazioni di equilibrio della fune

Jacques Bernoulli (che, come abbiamo visto, non era riuscito a consegnare in tempo la soluzione al problema da lui stesso posto) approfondì la questione, occupandosene a fondo negli anni che vanno dal 1691 al 1698.
In quegli anni ricavò per la prima volta un'equazione di *equilibrio statico in forma differenziale* (le chiavi della soluzione della catenaria erano ottenute sulla base di condizioni di equilibrio su tratti di lunghezza *finita*):

$$\frac{d}{ds}\left(k \cdot a \cdot \frac{dy}{dx}\right) = -f_y$$

Insieme alla catenaria egli studiò due curve speciali, l'identificazione delle quali impegnerà in futuro anche altri studiosi, tra cui Eulero:
- la *velaria*, cioè la forma della sezione di una vela tesa dal vento;
- la *lintearia*, cioè la forma della sezione di un lenzuolo teso dal peso di un liquido.

In entrambi i casi le superfici di vela e lenzuolo sono assunte cilindriche (cioè pensabili generate da una retta che restando parallela a sé stessa si muova lungo una curva piana) così che il problema possa essere studiato come piano.

Infine negli anni 1697-98 [*Varia Posthuma*, p. 1036-1048, Opera 2 (1744)] ricavò le equazioni generali per un filo flessibile nel riferimento intrinseco, **in base all'equilibrio in direzione normale e tangenziale**:

$$\boxed{\frac{T}{r} = f_n \qquad \frac{dT}{ds} = -f_t}$$ (p. 284)

Jacques Bernoulli e il nuovo problema dell'*elastica*

Il problema nuovo, proposto nel giugno 1691, [Acta Eruditorum, p. 282-290] è il seguente: trovare la forma di una trave caricata al suo estremo o soggetta al peso proprio.

Nel 1694 egli pubblica la soluzione: *Curvatura di una lamina elastica. Sua identità con la curvatura della lintearia (forma assunta da un telo gravato dal peso del liquido che esso regge). Raggi dei cerchi osculatori espressi in termini semplicissimi; insieme a certi pertinenti nuovi teoremi.*
"Curvatura laminae elasticae. Ejus identitas cum curvatura Lintei a pondere inclusi fludidi expansi. Radii Criculorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti; una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, etc", Acta Eruditorrum, Mensis Junii, 1694, 262-276.

> Dopo un silenzio di tre anni mantengo la mia parola ma in modo tale da compensare ampiamente l'attesa che avrà spazientito il lettore, in quanto rendo nota la curvatura di lamine non in un solo modo (come avevo promesso all'inizio) ma costruita su ipotesi più generali.
> Pertanto, se non erro, sono il primo a riuscire nella soluzione di un problerma tentata da molti invano.
>
> Questo problema è più difficile di quello funicolare, e non senza ragione.
> Per tacer d'altro, è da notare che **per investigare la forma della catenaria sono disponibili due chiavi,** che conducono a due differenti equazioni, una delle quali esprime la natura della curva attraverso la relazione tra le coordinate della curva stessa, mentre l'altra tramite la relazione del filo e della sua evolvente; **invece, per indagare la natura di una curva elastica, solamente la seconda chiave apre la porta** [*ad curvae elasticae naturam indagandam posteriore tantum clave aditus pateat*].

Bernoulli aggiunge anche *Non posso inoltre rimandare la pubblicazione di un teorema aureo* (sembra però che Huygens e Leibniz reagissero con sarcasmo, in quanto conoscevano già l'espressione del teorema).

Il teorema costituisce l'importante relazione tra il raggio di curvatura di una curva r e la sua espressione analitica y in un riferimento cartesiano:

$$\frac{1}{r} = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Poiché Jacques Bernoulli assume proporzionalità tra la curvatura nel punto ed il momento flettente il problema di trovare l'equazione della curva elastica - risolto in base al solo equilibrio dei momenti - è formalmente ricondotto a due successive integrazioni.

Al termine dalla memoria è tracciato pure un sostanzioso piano di lavoro:

> Rimane ora di investigare, mantenendo le comune ipotesi, quali curve si ottengano quando una lamina elastica si inflette anche per il proprio peso, oltre che per i pesi portati, quando la lamina è inflessa da entrambi gli estremi contemporaneamente, quando non ha spessore uniforme o larghezza uniforme o quando ha forma triangolare o di qualche altra figura ...
> Ma molte cose hon ho ancora assimilato, né alcuno può farlo *(Sed pleraque nondum digessi, nec uni vacat agere omnia)*.
> Del resto sembra corretto lasciare qualcosa alla perspicacia del lettore, al quale è stata qui offerta un'ampia coccasione di portare a compimento la nostra trattazione.

Eulero: l'eredità di Jacques Bernoulli e il periodo di Basilea

Dunque da Jacques Bernoulli il giovane Eulero ha ereditato:
- le equazioni differenziali generali per l'equilibrio dei fili flessibili, ottenute in base al concetto di *tensione*;
- la relazione di proporzionalità tra momento resistente e *curvatura*.

Prima di lasciare Basilea per Pietroburgo Eulero inizia ad interessarsi del problema delle curve elastiche, introducendo, come Jacques Bernoulli, l'equilibrio diretto sulla sezione.
La memoria ha per titolo "Sull'oscillazione degli anelli elastici", e sarà pubblicata solo nel 1862 (*De oscillationibus annulorum elasticorum*, Opera postuma, 2, 129-131, 1862 [E 1].
Egli confronta una porzione d'anello prima e dopo la deformazione, dando per scontata l'ipotesi (errata) che la fibra neutra sia posta all'intradosso [Fig. 3 nella memoria originale]

> $E\varepsilon$ è l'allungamento dovuto alla deformazione: l'angolo $Ee\varepsilon$ è saturato pertanto da filamenti, disposti trasversalmente, che tentano di ricongiungere i due lati Ee ed εe, e dalla loro forza dipende la coesione tra le parti della materia di cui è fatto l'anello.

Eulero ricava la forza che, applicata in *E*, esercita su *e* lo stesso momento statico prodotto dal complesso di tutte le fibre sollecitate.
Nella formula ottenuta appare la **diretta proporzionalità tra il momento flettente e la *differenza* tra le curvature finale ed iniziale.**

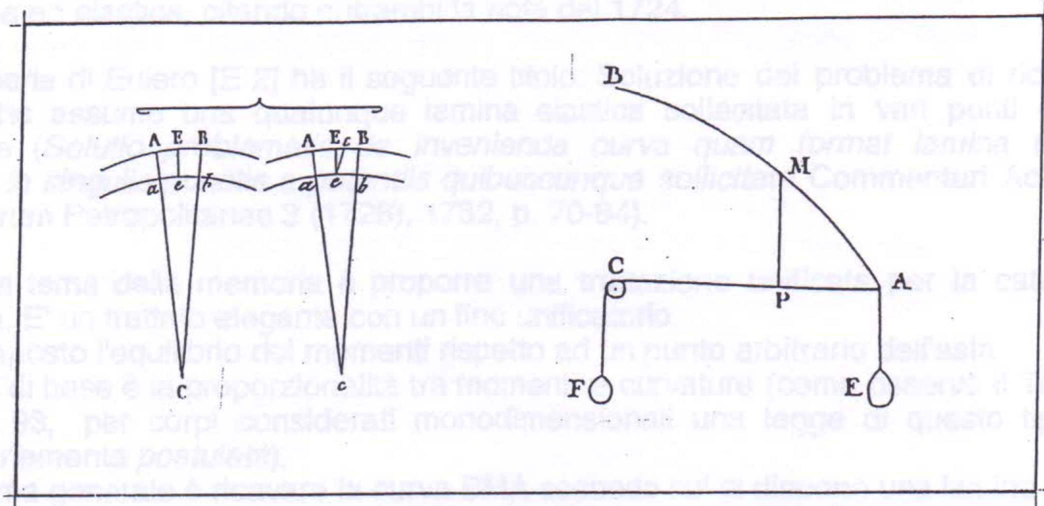


Fig. 8 - Disegni tratti da [E 1] (Periodo di Basilea) e da [E 2] (1728)

L'unificazione della teoria della catenaria e dell'*elastica* (1728)

Ricordiamo che al termine della memoria del 1694 Jacques Bernoulli proponeva di studiare il caso di una lamina caricata *sia* dal proprio peso *sia* da un carico concentrato terminale.
Dopo la memoria di Jacques Bernoulli del 1694, il tema dell'elastica restò sospeso per trenta anni fino ad una nota del 1724 [Acta Eruditorum 1724, p. 366] nella quale un anonimo studioso (che si siglava L.B.C.) invitava a riprendere il tema della catenaria, supponendo nel filo una certa resistenza alla flessione.
Entrambe le proposte invitavano ad una teoria unificatrice della fune e dell'elastica.

Per facilitare la comprensione di quanto seguirà credo siano necessari alcuni chiarimenti di terminologia. Quelli che affrontiamo sono proprio i brani in cui la nascente Scienza delle Strutture sta costruendo il suo linguaggio.
Quella che oggi noi chiamiamo *trave* o *asta* (o *verga* nel linguaggio della meccanica razionale) era qui denominata *filo* o *lamina*. Sono inoltre distinti i casi di corpo *flessibile* ed *elastico*, cosa che può stupire il lettore moderno. Infatti noi siamo abituati a parlare in generale di comportamento elastico e distinguere poi le varie resistenze introducendo i concetti di rigidezza assiale e flessionale (oltre naturalmente quelle agli effetti di taglio, escludendo gli effetti torcenti poiché restiamo in ambito di un problema piano).
Così la fune ha la sola rigidezza assiale (cui naturalmente sempre compete l'aggettivo di elastica), mentre la trave possiede anche rigidezza flessionale.
Bernoulli ed Eulero consideravano *elastico* il solo comportamento della trave (interessandosi della sola deformata a flessione): in questa ottica la fune, che ha rigidezza assiale infinita, è allora *perfettamente* flessibile.

Nel febbraio 1728 Daniel Bernoulli ed Eulero presentano due memorie che unificano catenaria ed elastica, citando entrambi la nota del 1724.

La memoria di Eulero [E 2] ha il seguente titolo: Soluzione del problema di ricavare la curva che assume una qualunque lamina elastica sollecitata in vari punti da forze arbitrarie (*Solutio problematis de invenienda curva quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata* Commentari Academiae Scientiarum Petropolitanae 3 (1728), 1732, p. 70-84).

Il grande tema della memoria è proporre una trattazione unificata per la catenaria e l'elastica. E' un trattato elegante con un fine unificatorio.
Viene imposto l'equilibrio dei momenti rispetto ad un punto arbitrario dell'asta
L'ipotesi di base è la proporzionalità tra momenti e curvature (come osserva il Truesdell, [5], pag. 93, per corpi considerati monodimensionali una legge di questo tipo deve necessariamente *postulata*).
Il problema generale è ricavare la curva BMA secondo cui si dispone una lamina fissta in B, caricate da forze arbitrarie lungo la sua lunghezza e da una forza concentrata all'estremo A (Fig. 8) [Fig. 4 nella memoria originale].
Come appare dalla figura, E e F sono le componenti verticale ed orizzontale di questa forza terminale.
Dall'uguaglianza tra il momento agente ed il momento resistente in un generico punto M (posto che sia $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, coordinata curvilinea) si ottiene l'equazione integrale:

$$E \cdot x - F \cdot y + \int dx \int P \cdot ds - \int dy \int Q \cdot ds = \frac{A \cdot v}{r}$$

ove P e Q sono le conponenti verticali ed orizzontali dei carichi lungo l'asta; *A* è una costante, *v* è la rigidezza flessionale (*vis elasticia*).

Eulero differenzia l'equazione integrale ed ottiene una equazione in *dP, ddP, dQ, ddQ.*
Scrivendo i differenziali in funzione delle componenti normale e tangenziale N e T Eulero ottiene un'equazione che oggi scriveremmo:

$$\frac{d(N \cdot r)}{ds} + T = 0$$

$(N = f_n \quad T = f_t)$

Questo risultato si può anche ottenere eliminando la tensione T nelle due formule ottenute da Jacques Bernoulli del 1697-98: **Eulero ha riottenuto, in base al solo principio statico dell'equilibrio dei momenti, lo stesso risultato che Bernoulli aveva ottenuto in base all'equilibrio delle forze.** (p. 290)

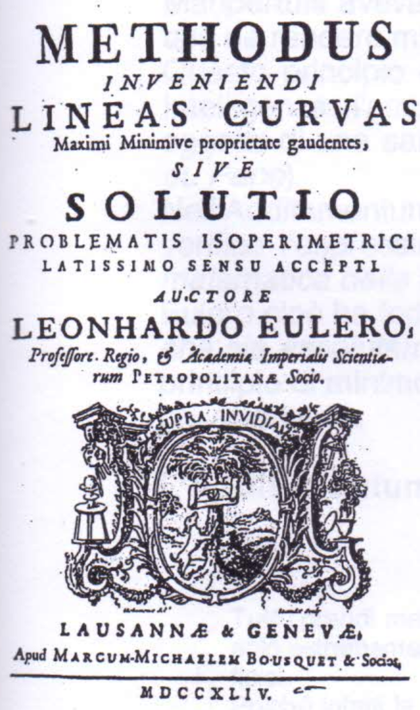
Nel caso di una fune perfettamente flessibile si ha $Av = 0$.
Egli così ottiene la catenaria e la *velaria* per forze parallele, la *lintearia* per carichi normali alla linea d'asse.
In particolare, nel caso di carichi tutti verticali sono distinti due casi:
$dP = a \cdot ds$ [proporzionalità tra il differenziale del carico e quello della lunghezza d'arco]
si ottiene la normale equazione della catenaria
$dP = a \cdot dx$ [proporzionalità tra il differenziale del carico e quello dell'ascissa]
si ottiene l'equazione della parabola.

Eulero esaurisce con ciò la famiglia delle curve *flessibili.*

In sintesi, Eulero unifica quindi la catenaria e l'elastica, utilizzando il metodo dell'equilibrio dei momenti: questo metodo sembrava l'unico modo di includere l'elastica, conformemente all'osservazione riguardo le *due chiavi* fatta da Jacques Bernoulli nel 1694.

A partire dal 1728, Eulero fece ripetuti tentativi per ricavare l'equazione dell'elastica direttamente dell'equilibrio delle forze su un tratto finito di curva.
L'impossibilità di ottenere questo risultato lo convinse che le due leggi (equilibrio delle forze ed equilibrio dei momenti) sono indipendenti.

Il *Methodus* di Eulero: l'espressione esplicita della deformata elastica


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios.
MDCCXLIV.

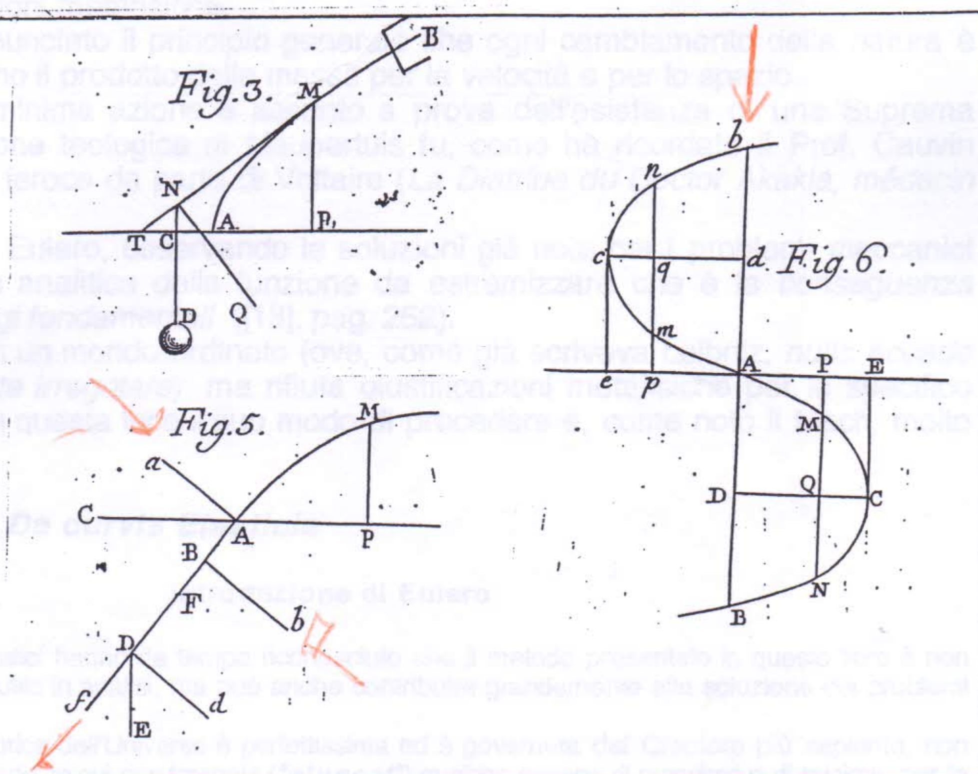


Fig. 9 - Frontespizio del *Methodus* (1744) e disegni tratti dall'*Additamentum I*

L'opera di Eulero del 1744 (*Metodo per ricavare curve che godono di proprietà di massimo o di minimo*) tratta cento problemi, risolvendoli e dando una teoria generale per lo studio dei problemi di estremo.
Nel trattato Eulero affronta il problema della catenaria: tra tutte le curve di data lunghezza, ricerca direttamente la funzione per cui il centro di gravità è posto ad altezza minima, riottenendo la già nota equazione della catenaria.
Il trattato del *Methodus* è accompagnato da due appendici, la prima dedicata alle curve elastiche e la seconda al problema di indagare, nell'ambito della meccanica del punto, sulle conseguenze del principio di estremo per la funzione espressa dall'integrale:

$$\int m \cdot v \cdot ds$$

Eulero era convinto che i fenomeni naturali potesser essere spiegati ricorrendo all'idea di *fine* oltre che a quella di *causa.*
Questa convinzione gli derivava certamente dalla sua fede religiosa: l'ordine dell'universo è garanzia dell'esistenza di principi estremali nelle leggi della natura.
Eulero però, a differenza del Maupertuis non ricercò la funzione da rendere estrema seguendo consideazioni metafisiche.
Maupertuis aveva enunciato il principio generale che ogni cambiamento della natura è tale da rendere minimo il prodotto della massa per la velocità e per lo spazio.
Questo principio di minima azione è assunto a prova dell'esistenza di una Suprema Intelligenza: l'ambizione teologica di Maupertuis fu, come ha ricordato il Prof. Cauvin oggetto di una satira feroce da parte di Voltaire (*La Diatribe du Doctor Akakia, médecin du Pape*).
Nell'Additamentum II Eulero, osservando le soluzioni già note per i problemi meccanici verifica l'espressione analitica della funzione da estremizzare che è la *conseguenza matematica delle leggi fondamentali* ([13], pag. 252).
Eulero cioè ha fede in un mondo ordinato (ove, come già scriveva Leibniz, *nulla accade che sia assolutamente irregolare*) ma rifiuta giustificazioni metafisiche per lo specifico principio di minimo: in questa luce il suo modo di procedere è, come notò il Mach, molto più scientifico.

L'Additamentum I: *De curvis Elasticis*

Introduzione di Eulero

Tutti i grandi matematici hanno da tempo riconosciuto che il metodo presentato in questo libro è non solo estremamente utile in analisi, ma può anche contribuire grandemente alla soluzione dei problemi fisici.
Poiché infatti la fabbrica dell'Universo è perfettissima ed è governata dal Creatore più sapiente, non accade nulla nel mondo, in cui non traspaia ("***eluceat***") qualche ragione di massimo e di minimo; per la qual cosa non può esservi alcun dubbio che tutti gli effetti della realtà possano essere determinati col metodo dei massimi e dei minimi in modo egualmente felice che mediante le stesse cause efficienti.

La curvatura di una catena sospesa può essere scoperta in due modi: a priori con l'attrazione di gravità e in secondo luogo col metodo dei massimi e dei minimi, avendo riconosciuto che il centro di gravità è il più basso possibile.
Similmente la curvatura di raggio passante per mezzi di varia densità determinata a priori può essere trovato con il metodo del minimo tempo.
Sebbene la figura dell'elastica è già nota da tempo, nessuno ha osservato che essa può essere strudiata con il metodo dei massimi e dei minimi, cioè tramite le cause finali.

[Questo non è proprio vero perché già Jacques Bernoulli aveva ricavato un principio di estremo identificando *lintearia* e linea elastica].

Nel 1742, a Berlino, Eulero riceve una lettera, datata 20 ottobre, da Daniele Bernoulli in cui lo invitava a ricavare la curva elastica "*direttamente dai principi della meccanica*":

> Vostra Signoria potrebbe riflettere un poco se uno non potesse dedurre la curvatura direttamente dai principi della meccanica...
>
> Voi facilmente risolverete questo problema di rendere minimo $\int \frac{ds}{r^2}$

Nel caso di una trave a sezione omogenea (per cui il prodotto EJ è costante) il problema coincide con quello di minimizzare l'energia potenziale elastica incamerata nell'inflessione della trave:

$$\frac{1}{2}\cdot\int EJ\cdot\frac{ds}{r^2}$$

La nuova soluzione dell'elastica e il confronto con il metodo *diretto*

Il problema è *isoperimetrico*: Eulero infatti ricerca, tra tutte le curve di assegnata lunghezza che passano per due punti fissi e in essi abbiano tangente assegnata, quella curva che minimizza l'espressione $\int \frac{ds}{r^2}$ e giunge ad un'espressione in termini di quattro costanti: a, α, β, γ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\alpha+\beta\cdot x+\gamma\cdot x^2\right)}{\sqrt{\left(a^4-\left(\alpha+\beta\cdot x+\gamma\cdot x^2\right)^2\right)}}$$

Dopo avere applicato il procedimento variazionale, Eulero utilizza il metodo **diretto**, seguendo Jacques Bernoulli (Tab. III, Fig.3).
In B la trave non solo è fissa ma è fissa anche la posizione della tangente (cioè l'estremo è incastrato); *AC* è un tratto rigido di lunghezza c.
Il momento esterno è pertanto *P(c+x)*
il momento resistente interno è assunto proporzionale alla curvatura, ed è espresso nella forma $\frac{E\cdot k^2}{r}$ [Eulero usa la notazione $E\cdot k^2$ per indicare la rigidezza flessionale oggi comunemente espressa con $E\cdot J$]
Sostituiamo l'espressione del raggio di curvatura in termini dei differenziali dx, dy, ds (il *teorema aureo* di Jacques Bernoulli) e integriamo ottenendo l'elastica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-P\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^2+c\cdot x+f\right)}{\sqrt{E^2k^4-P^2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^2+c\cdot x+f\right)}}$$

L'equazione è in accordo con la formula generale.

L'equazione effettiva dell'elastica e l'enumerazione delle elastiche

Studiamo la curvatura per tre forze: una diretta lungo l'asse e due forze ortogonali (Tab. III, Fig. 5). Se queste sono uguali (cioè equivalenti ad una coppia) l'elastica è un arco di circonferenza: la classe delle elastiche non comprende però solo le circonferenze.
Eulero procede con un'indagine più generale (Tab.III, Fig. 6): la direzione della forza è lungo AD.
Nel caso in cui x = costante = 0 si ricava che l'elastica è normale all'asse AP nel punto A e ha curvatura nulla: la trave rimane rettilinea.

Al paragrafo 25 Eulero nota che una curvatura infinitamente piccola può essere ottenuta da una forza finita *[erit vis ad hanc curvaturam infinite parvam laminae inducendam requisita finitae magnitudinis]*.
L'espressione di questa particolare forza è:

$$\frac{E \cdot k^2}{f^2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

ove f è la semilunghezza della lamina elastica.

PER QUESTO PARTICOLARE CARICO LA DEFORMATA RETTILINEA (ACCORCIAMENTO) PUÒ TRASFORMARSI IN UNA DEFORMATA CURVILINEA (BIFORCAZIONE EQUILIBRIO)

Eulero determina quindi tutti i tipi di curve elastiche per una trave inizialmente rettilinea caricata sull'estremo libero: sono di nove specie di cui quelle rettilinee, appena viste, costituiscono la prima (nella Fig. 10 ho riportato le tavole III e IV del trattato [la Fig. 13 della tavola IV appare, a rigore, inappropriata in quanto avendo Eulero, nel testo, assunto $l = 2f$ la figura corretta essere quella di un'asta a due cerniere]):

- Fig. 6: Specie II
- Fig. 7: Specie IV
- Fig. 8: Specie V
- Fig.9: Specie VI
- Fig. 10: Specie VII
- Fig. 11: Specie VIII

SE IL CARICO CRESCE È MINORE IL LAVORO FLESSIONALE DI QUELLO NECESSARIO PER ACCORCIARE IL PILASTRO

Le deformate sono calcolate nell'ipotesi di deformazioni di ampiezza finita, essendo la soluzione rigorosa: poiché il legame sforzi-deformazioni legava in modo globale momento resistente e curvatura l'errore di Eulero di posizionare l'asse neutro sul lato concavo non invalida i risultati ottenuti.

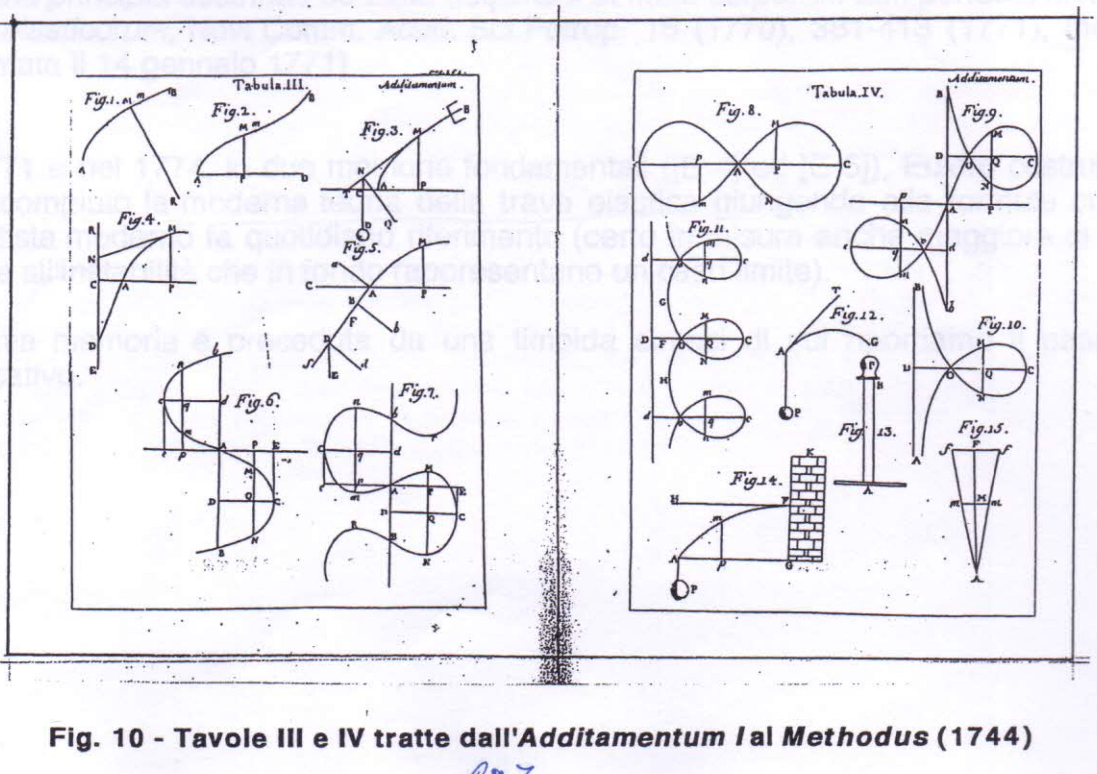


Fig. 10 - Tavole III e IV tratte dall'*Additamentum I* al *Methodus* (1744)

La *forza* delle colonne ed il concetto di *carico critico*

Al termine della classificazione (paragrafo 37) Eulero ritorna quasi sui suoi passi perché ha compreso l'importanza della formula in precedenza ricavata.

> *Quanto prima detto riguardo la prima specie può essere utile a giudicare le forze delle colonne (...)*
> *[Quae ante de specie prima sunt annotata inservire possunt viribus columnarum dijudicandis]*
>
> Eulero esplicitamente dichiara che oltre alla semplice resistenza assiale va pure considerata la resistenza all'inflessione laterale
>
> *Se la colonna è costruita in modo di non potersi rompere a causa di P, ancorché grande, l'unica cosa da temere è l'inflessione della colonna (...).*
>
> Eulero conclude l'argomento con una raccomandazione di carattere specificamente ingegneristico
>
> *Questi principi andrebbero applicati per le colonne di legno, poiché queste sono quelle più facili ad incurvarsi.*

Il trattato dell'*ADDITAMENTUM I* prosegue svolgendo i seguenti temi:
- la determinazione della rigidezza flessionale (*elasticità assoluta*) mediante prove sperimentali, misurando l'abbassamento all'estremo libero di una mensola (TAB. IV, Fig. 14);
- il caso di sezione variabile (Tab. IV, Fig. 15);
- il caso di assegnata curvatura iniziale;
- il caso in cui si abbiano più forze sollecitanti, risolto, come nella memoria del 1728, con l'equilibrio dei momenti nella sezione e comprendente il caso dei fili perfettamente flessibili, nei quali l'*elasticità assoluta* è nulla;
- la trattazione dei problemi di dinamica della trave.

I principi autentici della dottrina dell'equilibrio e del moto dei corpi flessibili ed elastici (1771)

[*Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum,* Novi Comm. Acad. Sci.Petrop. 15 (1770), 381-413 (1771), memoria presentata il 14 gennaio 1771]

Nel 1771 e nel 1774, in due memorie fondamentali ([E 4] ed [E 5]), Eulero costruisce in modo compiuto la moderna teoria della trave elastica giungendo alle formule cui ogni progettista moderno fa quotidiano riferimento (certo in misura anche maggiore di quelle relative all'instabilità che in fondo rappresentano un caso limite).

La prima memoria è preceduta da una limpida sintesi di cui riportiamo il passo più significativo.

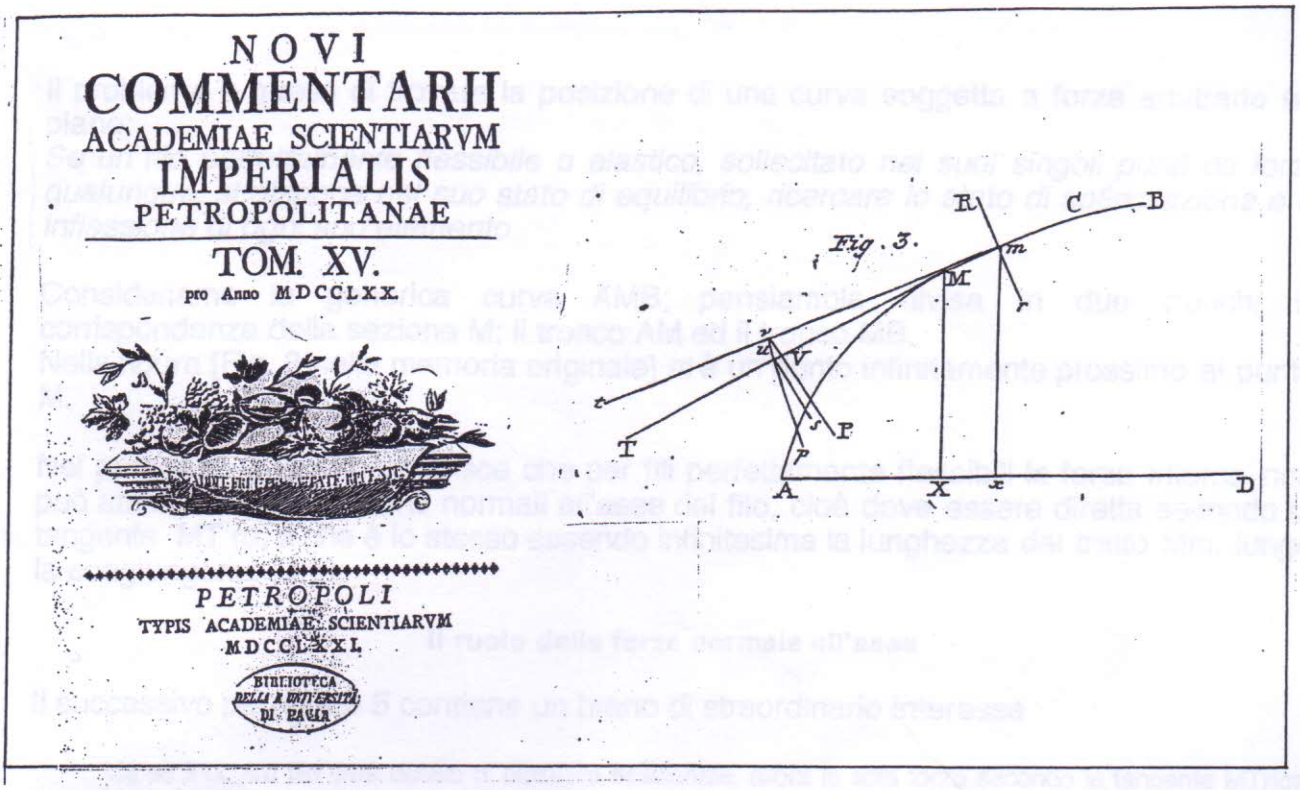


Fig. 11 - Tomo XV dei Nuovi Commentari di Petropoli e disegno tratto da [E 4]

Presentazione di Eulero

Quanto finora ottenuto da parte degli Studiosi riguardo lo studio della deformazione di corpi flessibili ed elastici è limitato al caso di semplici fili, sollecitati da forze qualunque, studiati sia quando essi siano perfettamente flessibili, sia quando invece abbiano resistenza alla flessione.

Anche ciò che è stato scritto riguardo la *lintearia* e la *velaria* si può accettare solo se è lecito riportare queste forme alla curvatura di un semplice filo.

Inoltre ogni cosa esplorata a questo proposito si può riportare a curve definite solamente nel piano.

Allo stato attuale siamo pertanto **siamo realmente lontani da una teoria completa [longissime adhuc sumus remoti a Theoria completa]** per opera della quale si possa definire non solo la deformata, ma anche la configurazione completa dei corpi flessibili; e questa teoria sembra finora talmente nascosta che neppure i suoi primi principi sono stati finora sviluppati.

In questa sede non è mio proposito intraprendere una tale fatica: tratterò piuttosto un po' più accuratamente il caso di semplici fili sia perfettamente flessibili sia elastici; caso, di cui, invero, si sono finora occupati tutti gli Studiosi.

Poiché la maggior parte delle soluzioni che si possono trovare qua e là su questo argomento sono state dedotte solamente o da principi particolari o da principi non sufficientemente chiari, **io farò in modo di esporre chiaramente i principi veri e generali sui quali si fonda la determinazione della configurazione dei corpi [operam dabo, ut vera et generalia principia, quibus determinatio figurae huiusmodi corporum innititur]**, affinché si possa studiarne non solo lo stato di equilibrio, ma anche il moto.

Il problema è quello di trovare la posizione di una curva soggetta a forze arbitrarie nel piano:
Se un filo perfettamente flessibile o elastico, sollecitato nei suoi singoli punti da forze qualunque, si dispone nel suo stato di equilibrio, ricercare lo stato di sollecitazione e di inflessione di ogni suo elemento

Consideriamo la generica curva AMB; pensiamola divisa in due tronchi in corrispondenza della sezione M: il tronco AM ed il tronco MB.
Nella figura [Fig. 3 nella memoria originale] *m* è un punto infinitamente prossimo al punto M.

Nel paragrafo 4 Eulero chiarisce che per fili perfettamente flessibili la forza interna non può ammettere componenti normali all'asse del filo, cioè deve essere diretta secondo la tangente MT (o, il che è lo stesso essendo infinitesima la lunghezza del tratto Mm, lungo la congiungente Mm).

Il ruolo della forza normale all'asse

Il successivo paragrafo 5 contiene un brano di straordinario interesse

> Ma se il nostro filo sarà dotato di elasticità flessionale, allora la sola forza secondo la tangente MTnon basterà a trattenere l'elemento Mm nella sua posizione, se questo elemento è stato curvato nel punto m ...per la qual cosa, **se nel filo c'è elasticità, questa forza che ricerchiamo non sarà solo diretta secondo la tangente MT, ma dovrà essere pure presente una certa componente obliqua, il momento della quale valga a sostenere la curvatura nel punto *m* [si elasticitas filo insit, vis ea, quam quaerimus, non solum secundum tangentem MT erit directa, sed etiam vis quaedam obliqua adesse debet, cuius momentum incurvationem in puncto *m* sustinere valeat].**

Dobbiamo qui rilevare che, a rigore, questa forza normale non è in realtà necessaria a causa dell'inflessione (cioè della curvatura) ma a causa della variazione del grado di questa stessa inflessione: la forza di taglio è infatti assente nei tratti ove il momento flettente è costante (ove cioè la curvatura è costante, atteggiandosi la deformata secondo archi di cerchio).

Eulero rimpiazza l'azione del tronco AM sul tronco MB con l'**insieme di una forza e di un momento.**
La forza è composta da una componente tangente *T* e da una componente normale *V*, posta a distanza *v* sulla tangente così che il momento trasmesso è il prodotto *vV*.

Solo in base a questa concezione dell'azione interna l'equilibrio alla traslazione può essere preso in considerazione: l'azione mutuamente scambiata cessa di essere tangente e localizzata sull'asse della trave.

Le equazioni differenziali nel riferimento intrinseco

Nell'undicesimo paragrafo sono ricavate le equazioni differenziali esatte della trave nel riferimento intrinseco (la notazione è quella di Eulero):

I) equilibrio delle forze secondo la direzione tangente

$dT + V \cdot d\Phi = p \cdot ds$ cioè $\dfrac{dT}{ds} + V \cdot \dfrac{d\Phi}{ds} - p = 0$

II) equilibrio delle forze secondo la direzione normale

$dV - T \cdot d\Phi = q \cdot ds$ cioè $\dfrac{dV}{ds} - T \cdot \dfrac{d\Phi}{ds} - q = 0$

III) equilibrio dei momenti rispetto al punto *m*

$d \cdot (Vv) = V \cdot ds$ cioè $\dfrac{d(Vv)}{ds} = V$

p e *q* sono le componenti dei carichi secondo la tangente e la normale.

Eulero termina il paragrafo con una osservazione essenziale:
***atque his tribus aequationibus omnia continentur, quae ad problematis nostri solutionem pertinent* [e in queste tre equazioni è contenuto tutto ciò che riguarda la soluzione del nostro problema].**

Nella meccanica del corpo deformabile è questa la prima volta in cui i due equilibri alla traslazione e alla rotazione (su un elemento infinitesimo) sono considerati quali principi indipendenti, risolvendo finalmente la dicotomia metodologica (le *due chiavi*) segnalata da Jacques Bernoulli nel 1694.

Le equazioni di equilibrio di Eulero e la teoria tecnica della trave

Introducendo il raggio di curvatura *r*, trascrivendo la componente tangenziale della forza interna *T* con la lettera *N* ed il momento *Vv* con la lettera *M*, secondo la notazione moderna ed indicando le componenti tangenziali e normali dei carichi con le lettere f_t ed f_n $(f_t \equiv p \;\; f_n \equiv q)$ si ottengono le tre equazioni ben note:

$$\frac{dN}{ds} + \frac{V}{r} + f_t = 0$$

$$\frac{dV}{ds} - \frac{N}{r} + f_n = 0$$

$$\frac{dM}{ds} = V$$

Supponendo infinito il raggio di curvatura da esse si ottengono le usuali formule della teoria tecnica della trave rettilinea, che certamente potremmo chiamare *equazioni di Eulero*:

$$\frac{dN}{dz} + p = 0$$
$$\frac{dV}{dz} + q = 0$$
$$\frac{dM}{dz} = V$$

Lo studio di quattro casi fondamentali

Stabilite le tre equazioni differenziali, aggiungendo l'ipotesi che il *momento resistente* è proporzionale alla curvatura della trave nel punto, Eulero studia i quattro casi seguenti, tutti svolti in maniera unitaria in quanto riconducibili a particolari ipotesi sul valore del prodotto *Vv*, che rappresenta il momento agente.

- fili perfettamente flessibili : *Vv=0*, essendo *V=0*
- fili uniformemente elastici: $Vv = A \cdot \frac{d\varphi}{ds} = A \cdot \frac{1}{r}$ con *A* costante
- fili non uniformemente elastici: $Vv = S(s) \cdot \frac{d\varphi}{ds} = S(s) \cdot \frac{1}{r}$ con S funzione dell'arco *s*
- fili inizialmente curvi: $Vv = A \cdot \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{R}\right) = A \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$ ove $\frac{1}{R}$ è la curvatura iniziale

Sui due metodi per determinare l'equilibrio e il moto di un corpo flessibile ed il loro straordinario accordo (1774)

"De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi et utriusque egregio consensu", Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. 20 (1775), 268-303 (1776), memoria presentata il 31 ottobre 1774]

Primo paragrafo introduttivo

Già nel Tomo Terzo dei primi Commentari dell'Accademia Imperiale (*è la memoria del 1728 [E 2]*) ho esposto il modo di trovare in generale la forma che deve assumere un filo sia perfettamente flessibile sia elastico, sollecitato da forze qualunque, non appena sia raggiunto lo stato di equilibrio.

Il metodo è fondato sull'equilibrio dei momenti, visto che l'insieme dei momenti che nascono dalle singole forze sollecitanti deve essere equilibrato in ogni punto del filo dalla sua resistenza elastica.

Non sullo stesso assunto però ho estesamente esposto l'altro metodo, nel Tomo Quindicesimo dei *Nuovi Commentari* (è la memoria del 1771 [E 4]), nel risolvere le stesse questioni basandomi sul concetto delle forze dalle quali sono affette le singole porzioni di filo.

Le formule che danno questa soluzione successiva sembrano in dissonanza con la soluzione precedente a tal punto che, a prima vista, è lecito non vedervi accordo.

La ragione di questa diversità è posta in questo fatto manifesto: che i due principi (l'uno dei momenti, l'altro delle tensioni) sono talmente in discrepanza tra di loro da sembrare che non abbiano niente in comune.

Chi non potrebbe però dubitare che la soluzione debba essere ricavata con entrambi i metodi, **dal momento che io stesso, in passato, dubitai più volte che fosse possibile l'accordo tra i due metodi? [quod quidem dubium me ipsum non semel haesitantem reliquit].**

Per la qual cosa io confido di aver lasciato agli Studiosi un dono non ingrato , se avrò lucidamente ed universalmente dimostrato come egregiamente accordare questi due principi tra loro diversi.

correggere

AZIONE ASSIALE

A 65 anni Eulero, conclude un ciclo di riflessioni durato più di un quarantennio.
Cita la soluzione del 1728 (che forniva la deformata elastica) e rileva che con quel metodo non riusciva a trovare la ~~tensione~~ e la forza normale.
La memoria dimostra che le nuove equazioni differenziali (ottenute nel 1771) non solo implicano le vecchie equazioni integrali ma dicono anche di più: infatti dalla memoria del 1728 era sempre rimasto *misterioso* ciò che deve essere equilibrato con l'equilibrio alla traslazione.

La vecchia e la nuova soluzione

Nel capitolo SOLUTIO PRIOR EX PRINCIPIO MOMENTORUM PETITA, Eulero riprende la soluzione in forma integrale della memoria del 1728 che, nel caso in cui non siano presenti forze terminali concentrate, si semplifica in:

$$\int dx \int P \cdot ds - \int dy \int Q \cdot ds = S \cdot \frac{d\varphi}{ds}$$

ove S è la costante che rappresenta la rigidezza flessionale: è infatti $\boxed{\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}}$, se φ è l'angolo AMP (Fig. 8).

> Né invero è possibile conoscere sintomi che accompagnano la configurazione della lamina: le tensioni sostenute dai singoli elementi, e anche le forze normali richieste per produrre la curvatura di qualunque elemento; e a questa mancanza mi sono sforzato di supplire con l'altro metodo di seguito esposto.

Nel successivo capitolo SOLUTIO POSTERIOR EX PRINCIPIO TENSIONUM PETITA, Eulero riprende la soluzione in forma differenziale della memoria del 1771:

I) $dT + V \cdot d\varphi = p \cdot ds$
II) $dV - T \cdot d\varphi = q \cdot ds$
III) $V \cdot ds = d\,(Vv)$

e aggiunge l'equazione che esprime l'equilibrio tra il momento agente Vv ed il momento resistente:

$$Vv = S \cdot \frac{d\varphi}{ds}$$

Questo permette di riscrivere la III) sotto la seguente forma:

III') $V \cdot ds = \dfrac{d(S \cdot d\varphi)}{ds^2}$

Segue il capitolo fondamentale DEMONSTRATIO CONSENSUS INTER HAS DUAS SOLUTIONES, nel quale Eulero dimostra che le equazioni differenziali contengono la vecchia soluzione in forma integrale.

Correggi

ERRORE

invertire normale e tangenziale

Dopo aver sostituito nelle prime due equazioni l'espressione di $p \cdot ds$ e di $q \cdot ds$ ottenuta in base al legame tra p e q (componenti normale e tangenziale dei carichi) e P e Q (componenti verticale ed orizzontale degli stessi carichi), Eulero integra le combinazioni $I \cdot \cos\varphi + II \cdot \operatorname{sen}\varphi$ e $I \cdot \operatorname{sen}\varphi - II \cdot \cos\varphi$ ottenendo:

$$T \cdot \cos\varphi + V \cdot \operatorname{sen}\varphi = \int P \cdot ds$$

$$T \cdot \operatorname{sen}\varphi - V \cdot \cos\varphi = \int Q \cdot ds$$

equazioni risolubili in T e in V.
Sostituendo il valore che si ricava per V nella III' si ha:

Correggi

$$\operatorname{sen}\varphi \cdot \int P \cdot ds - \cos\varphi \cdot \int Q \cdot ds = \frac{d(S \cdot d\varphi)}{ds^2}$$

ERRORE

Ricordando che $dx = ds \cdot \operatorname{sen}\varphi$ e $dy = ds \cdot \cos\varphi$ ed integrando si riottiene infine la relazione integrale del ~~1771~~: 1728 1728

$$\int dx \int P \cdot ds - \int dy \int Q \cdot ds = S \cdot \frac{d\varphi}{ds}$$

E questa equazione è chiaramente la stessa alla quale ci aveva condotti il primo metodo basato sull'equilibrio dei momenti, così che ora, invero, risplenda, chiarissimo, un bellissimo accordo di entrambi i metodi [ita ut nunc quidem pulcherrimus consensus utriusque methodi clarissime **eluceat**].

Conclusione

Ho evidenziato quel verbo **(eluceat)** così caro ad Eulero: esso compare anche nella solenne introduzione al trattato sulle curve elastiche in appendice al Methodus del 1744. Eulero quando lo utilizza è completamente cieco.
Riportando una riflessione della filosofa Simone Weil (sorella del matematico André Weil) Eulero, come ogni sommo matematico, ricercò unicamente la verità *ottenendo il mondo in sovrappiù* .
Eulero possedeva, in altissimo grado una virtù (che Cartesio considerava fondamentale): quella di stupirsi.
Leggendo Eulero avviene di penetrare nella sua stessa emozione.
Avvertiamo la straordinaria ricchezza dell'invenzione e contemporaneamente la capacità di non esserne travolti, l'umiltà di scegliere e di definire: scegliere un'idea direttrice ed intorno ad essa organizzare il traboccante pensiero.
Ci si convince della verità dell'osservazione del Condorcet: *Eulero preferiva istruire i suoi allievi piuttosto che prendersi la meschina soddisfazione di stupirli.*

Scrisse con perfetto candore; fu il primo autore scientifico a citare il lavoro di altri ringraziandoli per i loro metodi piuttosto che criticarli per errori o manchevolezze; potendo dare solo una visuale parziale di un problema, egli rivelava i suoi risultati imperfetti, nella speranza che altri potessero usarli

Tradotto da C. Truesdell [20]

Anch'io, emulando in questo il grande Eulero, ho esposto in questa conferenza i *risultati imperfetti* dei miei studi nella speranza che anche queste mie modeste riflessioni possano essere utili a riscoprire il grande artefice della moderna meccanica strutturale.

Riferimenti bibliografici

[1] *L. Euler 1707-1783,* Math Ecole, Géneve, n. 109, septembre 1983

[2] *Leonhard Euler 1707-1783 Beitrage zu Leben und Werk,* Basilea, 1983

[3] C. Truesdell, *A program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason,* Archive for History of Exact Sciences, 1, p. 3-36 (1960)

[4] C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics,* Berlin, 1968

[5] C. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic boodies, 1638-1788,* L.Euleri O.O. (2) 11_2, 1960

[6] C. Truesdell, R. Toupin, *The classical Field Theories,* Handbuch der Physik, III/1

[7] E. Cassirer, *Il problema della conoscenza nella filosofia e nella scienza,* Torino, 1953

[8] H.H. Goldstine, *A History of Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century,* New York, 1980

[9] J.L. Lagrange, *Mécanique analitique,* III édition, Paris, 1853

[10] I. Newton, *Principi di filosofia naturale,* a cura di F. Enriquez e U.Forti, Roma, 1925

[11] A. Sommerfeld, *Lezioni di fisica teorica: meccanica,* Wiesbaden,1949

[12] E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico,* I ed. 1883; trad. it. 1977

[13] E. Benvenuto, *La scienza delle Costruzioni e il suo sviluppo storico,* Firenze, 1981

[14] E. Benvenuto, *An introduction to the History of Structural Mechanics,* New York, 1991

[15] P. Dupont, *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale,* Vol. I, II_1, II_2, Torino, 1979-1982

[16] *Opere di Galileo Galilei,*, Vol. I, II, a cura di Franz Brunetti, Torino, 1980

[17] J. Dieudonné, *Pour l'honneur de l'ésprit humain,* Paris, 1987 (trad. it.: *L'arte dei numeri,* Milano, 1989)

[18] E. Cassirer, *Cartesio e Leibniz,* 1902 (trad. it. Bari, 1986)

[19] C. Wilson, *D'Alembert versus Euler on the precession of the Equinoxes and the Mechanics of Rigid Bodies,* Archive for History of Exact Sciences, N. 37, p. 233-273 (1987)

[20] C. Truesdell, *History of Classical Mechanics Part I: to 1800,* Die Naturwissenschaften, 63, 53-62 (1976)

Memorie di Eulero e riferimenti all'*Opera Omnia (O.O)*

Le memorie citate, consultate nell'originale conservato nella Biblioteca Centrale dell'Università di Pavia, sono riportate nell'Opera Omnia (*Leonhardi Euleri Opera Omnia*) secondo la seguente corrispondenza:

[E 1] *De oscillationibus annulorum elasticorum*
Opera postuma 2, 1862, p. 129-131.
Composizione: periodo di Basilea
O.O. II, 11, 378-382

[E 2] *Solutio problematis de invenienda curva qum format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata*
Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 3 (1728), 1732, 70-84
Presentazione: febbraio 1728
O.O. II, 10, 1-16

[E 3] *Decouverte d'un nouveau principe de mécanique*
Mémoires de l'Academie des sciences de Berlin 6, (1750), 1752, 185-217
Presentazione: 3 settembre 1750
O.O. II, 5, 81-108

[E 4] *Genuina principia doctrinae de statu aequlibri et motu corporum tam perfecte flexibilim quam elasticorum*
Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 15 (1770), 1771, 381-413
Presentazione: 14 gennaio 1771
O.O. II, 11, 37-61

[E 5] *De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexiblium determinandi et utriusque egregio consensu*
Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 20 (1775), 1776, 286-303
Presentazione: 31 ottobre 1774
O.O. II, 11, 180-193

Ringraziamenti

Oltre al Prof. Dario Bozzolo della STS, ringrazio il Prof. Cesare Repossi della Biblioteca Centrale dell'Università di Pavia per l'aiuto prezioso che mi ha fornito nella consultazione dei testi storici.
Ringrazio anche la Signora Teresa Magnani della Biblioteca Centrale dell'Università di Pavia per la pazienza con la quale ha collaborato alla ricerca: è' grazie alla sua competenza che ho potuto rintracciare memorie pubblicate oltre tre secoli fa.
Infine ringrazio l'amico Prof. Emilio Malinverni di Zerbo (Pavia) la cui profonda conoscenza del latino mi ha permesso la comprensione dei documenti.