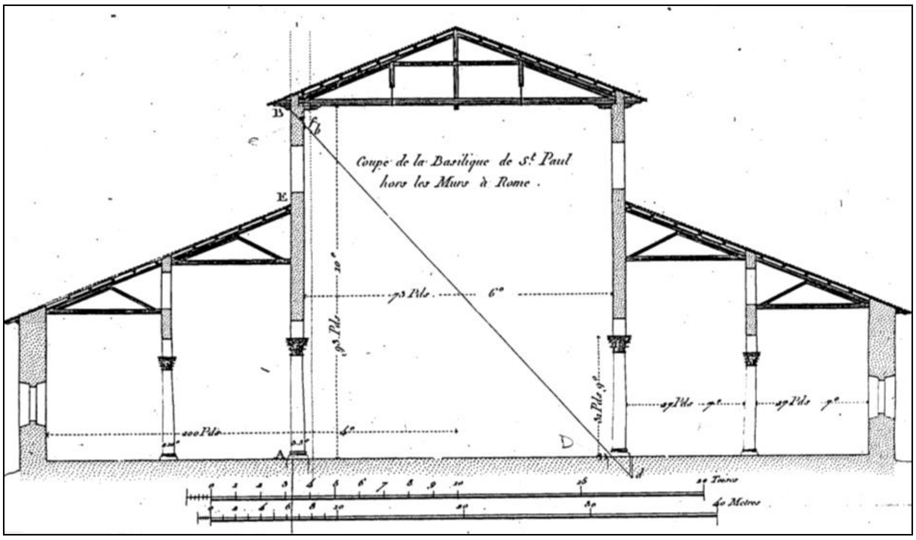
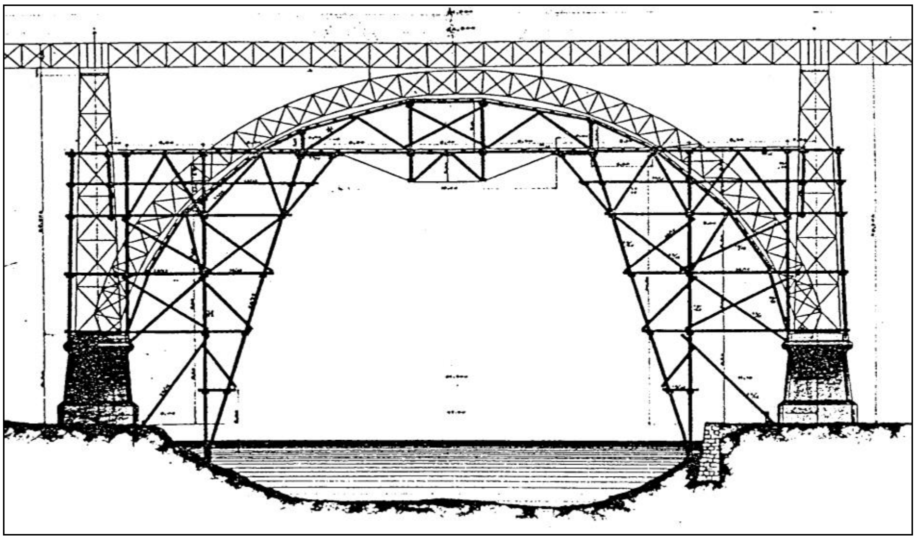
EVOLUZIONE SCIENTIFICA E COSTRUZIONI

Storia dei metodi scientifici applicati all'Architettura e all'Ingegneria





Giuseppe Stagnitto

Giuseppe Stagnitto

EVOLUZIONE SCIENTIFICA E COSTRUZIONI

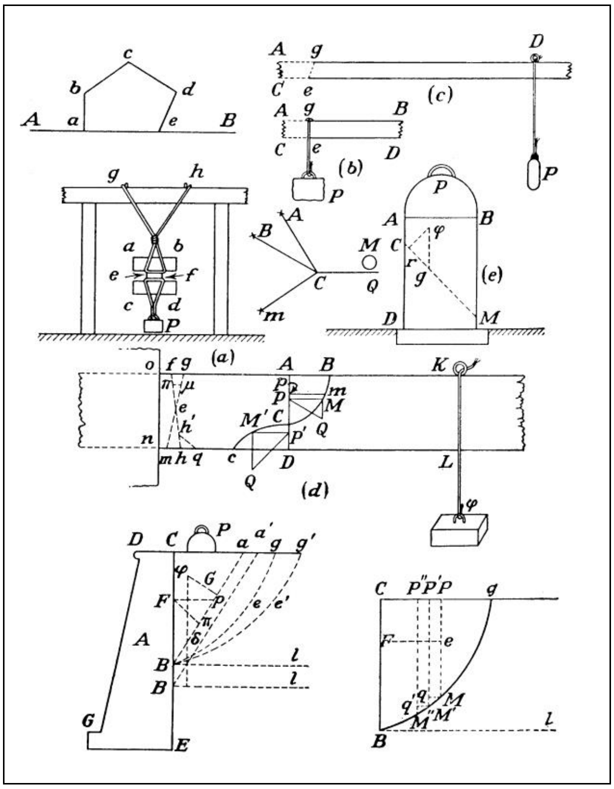


Tavola tratta dalla memoria di Coulomb: *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, Mémoires de Mathématique et de Phisique présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, vol.7, 1773, pp. 343-382, Paris (1776).

PARTE SECONDA

SCHEDE DIDATTICHE

Schede didattiche dedicate ai tre tipi strutturali fondamentali

- la fune o l'arco (con sezioni idealmente solo tese o solo compresse)
- la struttura reticolare (che ha alcune sezioni tese ed altre compresse)
- la trave (che ha compressione e trazione nella stessa sezione)

Scheda didattica del corso

Sviluppo storico della scienza e della Tecnica delle Costruzioni

La curva catenaria, l'arco, la cupola

II vantaggio di usare elementi tesi (come corde di fibre vegetali o catene di anelli metallici) per sorreggere i carichi era noto ai più antichi costruttori: la struttura che si otteneva si atteggiava da sé in quella configurazione che realizza l'equilibrio tra le forze in gioco.
Da tempi immemorabili si era pure scoperto il principio che, al contrario, il più razionale utilizzo di elementi compressi (come i conci di pietra o i laterizi) *presupponeva la disposizione* secondo uno schema geometrico, in funzione delle forze agenti.
Qualora queste forze si riducano ai pesi stessi dei conci, la figura geometrica ottimale si ottiene capovolgendo la forma di una fune sospesa agli estremi: è questa la figura di certi archi monumentali, la cui costruzione comprova l'intuizione di questo concetto.

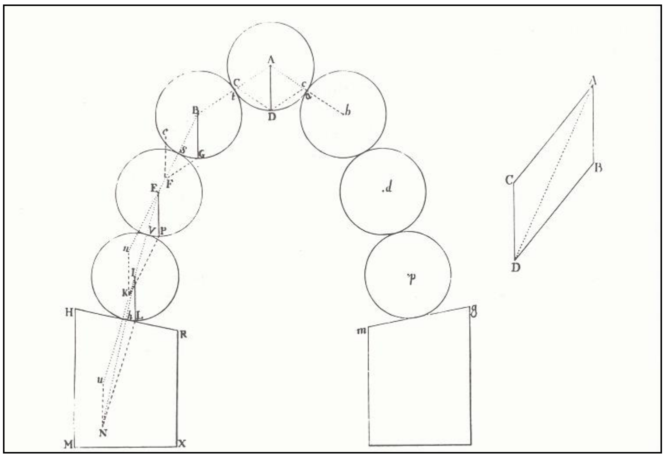
E' attribuita ad Hooke la prima formulazione esplicita del principio, nella forma di un anagramma (1675) che risolto e tradotto dice: *come si sostiene appesa una fune, così capovolti, si reggono i conci di un arco*.
La prima vera dimostrazione matematica risale tuttavia al 1704 per opera di Jacques Bernoulli che applicò genialmente il Principio dei Lavori Virtuali, eguagliando i lavori infinitesimi compiuti dalla forza peso agente e delle forze di compressione interne, riottenendo l'equazione differenziale, già nota da qualche anno, detta della *catenaria*.

E' noto che la soluzione del problema della catenaria rappresentò emblematicamente i poteri del nuovo strumento dell'analisi infinitesimale (ufficialmente presentato agli studiosi da Leibniz nel 1684) che permetteva - nota la legge del generarsi di una funzione - di risalire alla funzione generante stessa.

Nel nostro caso due di queste leggi erano note: il teorema del gesuita Pardies, per cui l'intersezione delle tangenti tracciate per i due estremi di ogni tratto di fune è sulla verticale passante per il baricentro del tratto stesso; il teorema per cui, nella situazione equilibrata, la tangente deve essere proporzionale alla lunghezza dell'arco.

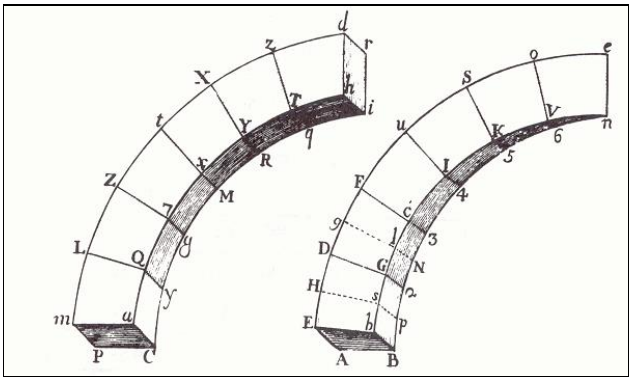
Questi due teoremi saranno le chiavi delle soluzioni del 1691 rispettivamente di Leibniz e di Jean Bernoulli; nel 1744 sarà pubblicata una nuova soluzione ad opera di Eulero che applicherà il nuovo metodo di calcolo variazionale al principio per cui la forma equilibrata di una fune di data lunghezza sospesa per i suoi estremi è quella per cui il baricentro risulta il più basso possibile.

Nel 1717 l'inglese Stirling - senza riferimento alla dimostrazione del 1704 di Jacques Bernoulli, pubblicata postuma - dimostrò che la curva che realizza l'equilibrio di una serie di sfere appoggiate le une sulle altre coincide con la catenaria rovesciata ottenibile con le sfere stesse.



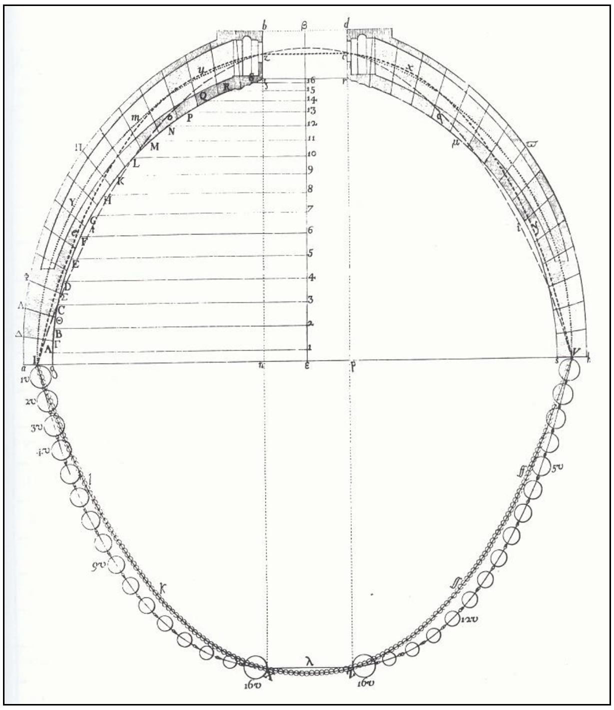
L'equilibrio di sfere di Stirling (1717)

Questa soluzione fornì al Poleni, incaricato nel 1743 di indagare sulla causa delle lesioni nella cupola di San Pietro a Roma, una metodologia di calcolo che costituisce una sintesi magistrale: supponendo già completamente lesionata la cupola egli individuava una serie di archi, riducendo il problema da spaziale a piano.



Gli archi di spessore variabile estraibili dalla cupola

Poleni è conscio che, a differenza del caso teorico risolto, non vi è omogeneità di pesi nello sviluppo della sezione verticale della cupola; egli allora costruisce una catenella formata da filetti di ferro uniti con anellini: ciascun filetto portava una pallina di piombo con peso proporzionale a quello del concio corrispondente.



Il calcolo *analogico* del Poleni

La forma ottenuta appendendo la catenella per i suoi estremi fu da lui battezzata *catenaria dei pesi disuguali*.

Come scrisse il Poleni nella sue *Memorie istoriche* del 1748 "*il punto principale consisteva nel vedere se veramente alcuna parte della catenaria cadesse fuori dei contorni della volta*" e la conclusione fu chiara: "*non per cattiva la figura della gran volta reputar si debba* ".

Il metodo del Poleni pur non essendo in grado di ricavare la vera curva delle pressioni (neppure quella corrispondente alla soluzione elastica, trattandosi di un arco iperstatico), sembra precorrere il moderno principio di Heyman.

Nel 1778 l'abate Bossut - riprendendo un lavoro matematico del 1743 del Bouguer - studiò la forma ottimale di una cupola nella stessa ipotesi che ogni unghia di essa fosse considerabile isolatamente dalle contigue, comportandosi come un arco di spessore variabile.

Se la cupola ha spessore costante si ottiene una curva che *non* coincide con la catenaria già nota: il Bossut riottenne così per via analitica il risultato già ricavato dal Poleni per via sperimentale (che nelle sue tavole aveva appunto confrontato la *catenaria omogenea* e la *catenaria dei pesi disuguali*).

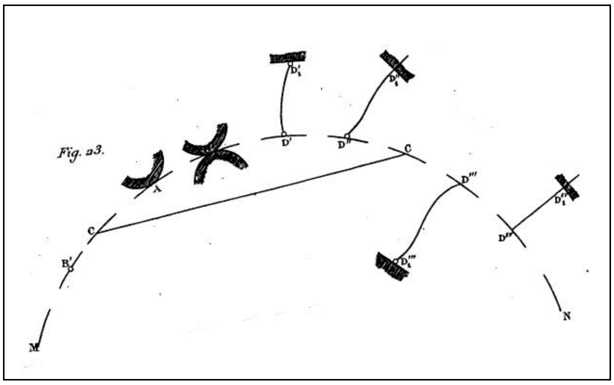
Nel caso più generale, qualora la cupola non fosse suddivisibile in archi isolati piani, l'estensione nello spazio del principio della funicolarità deve comprender un'ulteriore constatazione: la presenza dei paralleli che, con azioni equilibranti di compressione o di trazione, permettono in linea teorica, di convogliare su ciascun meridiano proprio quella parte del carico della quale esso è funicolare.

Scheda didattica del corso

Sviluppo storico della scienza e della Tecnica delle Costruzioni

La struttura reticolare e la statica grafica

Se gli antichi, negli edifici, avevano colto alcuni elementi funzionanti come *macchine semplici* (come la leva), solo nell'ottocento si individua nella costruzione una struttura vera e propria, il cui calcolo si rivelava però davvero difficoltoso.



Uno dei primi schemi di *struttura* in senso moderno [da Curioni]

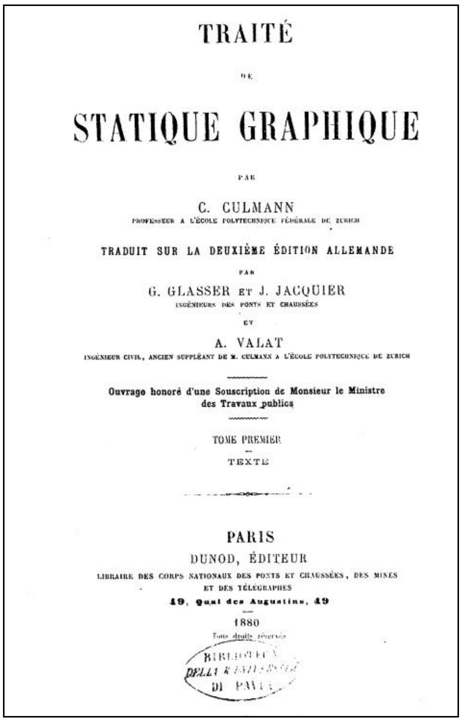
I metodi generali di calcolo formulati da Clebsh, da Maxwell e da Castigliano, ovviamente validi anche per strutture isostatiche, si traducevano infatti in sistemi di equazioni lineari non agevolmente risolubili.

Proprio a metà dell'ottocento lo sviluppo della ferrovia richiese un uso notevole di strutture metalliche, composte da un gran numero di elementi: per esse il calcolo analitico non appariva adatto.

Intorno al 1860 appare un originale metodo di calcolo ad opera del Professore Culmann del Politecnico di Zurigo.

In questo trattato le forze sono rappresentate secondo due linee distinte:

- una, di lunghezza indefinita, indicante la sola linea di azione;
- l'altra, di lunghezza finita e orientata, indicante la grandezza e il verso.


TRAITÉ

DE

STATIQUE GRAPHIQUE

PAR

C. CULMANN

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE ZURICH

TRADUIT SUR LA DEUXIÈME ÉDITION ALLEMANDE

PAR

G. GLASSER ET J. JACQUIER

INGÉNIEURS DES PONTS ET CHAUSSÉES

ET

A. VALAT

INGÉNIEUR CIVIL, ANCIEN SUPPLÉANT DE M. CULMANN A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE ZURICH

Ouvrage honoré d'une Souscription de Monsieur le Ministre des Travaux publics

TOME PREMIER

TEXTE

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS NATIONAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES ET DES TÉLÉGRAPHES

49, Quai des Augustins, 49

1880

Tous droits réservés

Frontespizio della traduzione francese del 1880 del trattato di Culmann

Il principio di questa rappresentazione, che costituisce il cuore della statica grafica, deriva dalla *Nouvelle Mecanique* (1687) di Varignon, pubblicato postumo nel 1725.

Nelle tavole del trattato appaiono chiaramente i cosiddetti *poligono delle forze* e *poligono funicolare,* a commento di teoremi che affermano che:

- a forze equiibrate secondo certi rapporti corrisponde una determinata figura funicolare, rispettante certi parallelismi;

- reciprocamente, ad una data figura funicolare corrispondono forze, secondo certi rapporti, che sono in equilibrio.

La chiusura dei due poligoni delle forze e funicolare (*Kräftepolygon* e *Seilpolygon*) traduce graficamente quelle due equazioni cardinali (equilibrio delle forze ed equilibrio dei momenti) che Eulero aveva posto ad intero fondamento della statica.

Le due figure, con lati corrispondenti paralleli, sono tali per cui le linee convergenti in un punto in una figura formano un poligono chiuso nella seconda e viceversa.

Due figure piane con questa proprietà sono dette *figure reciproche*.

Dopo la prima edizione (1866) del trattato di Cullmann, Luigi Cremona, Professore a Milano, colse la corrispondenza geometrica dei due diagrammi (immediata a cogliersi solo nel caso di forze concorrenti in un punto) nel caso generale di forze qualsiasi.

Per via puramente geometrica egli, nel suo trattato *Le figure reciproche nella statica grafica* (1872), dimostrò così il fondamentale Teorema di Culmann, dimostrabile anche per via statica.

Culmann nella seconda edizione (1880) sostituì la tavola che illustrava il suo procedimento grafico per determinare le forze nelle aste di una travatura reticolare con una nuova tavola portante gli esempi del Cremona, nella quale l'insieme dei poligoni delle forze sui vari nodi costituisce il rigoroso diagramma reciproco (cosiddetto *cremoniano*) della travatura stessa.

Successivamente, a fine ottocento, la nuova tecnica costruttiva del cemento armato privilegiò *strutture a telaio* per le quali la statica grafica non era lo strumento più adatto.

Fino all'avvento del computer, restò tuttavia insuperabile metodo di progetto e di verifica nei suoi due ambiti più congeniali: quello delle travature reticolari e quello degli archi.

La statica grafica, strumento rassicurante per le numerose verifiche interne al metodo stesso, può mantenere ancora oggi la sua validità ogni qual volta sia necessario far riferimento a metodi fondati sul solo equilibrio, come nella verifica della stabilità di strutture antiche.

La presenza del computer suggerisce la convenienza di operare una *trascrizione vettoriale* delle sue classiche costruzioni, come ad esempio quella del poligono funicolare passante per tre punti prestabiliti.

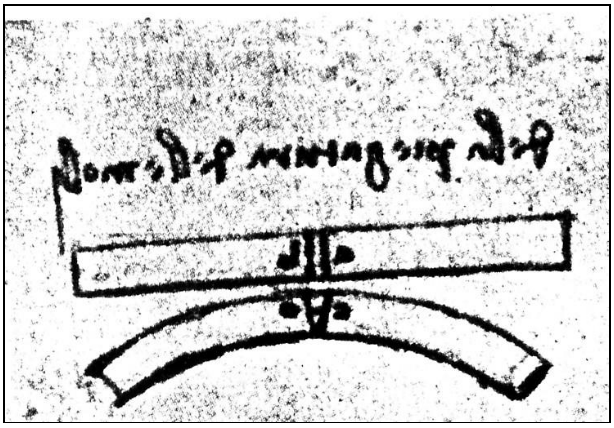
Scheda didattica del corso

Sviluppo storico della scienza e della Tecnica delle Costruzioni

La trave

Se l'intuizione del funzionamento statico di fune ed arco si perde nella notte dei tempi (in quanto fenomeni di trazione e di compressione, considerate isolatamente, costituiscono la più quotidiana delle nostre esperienze fisiche) non altrettanto può dirsi del funzionamento di una trave inflessa, in cui una stessa sezione risulta *in parte* tesa ed *in parte* compressa.

La prima traccia documentata della comprensione di questo fenomeno è un brano, accompagnato da una figura, nei *Codici di Madrid* di Leonardo: egli studiò la deformazione di una molla di balestra inflessa e notò l'esistenza di una zona centrale (il moderno asse neutro) che non risulta né tesa né compressa.

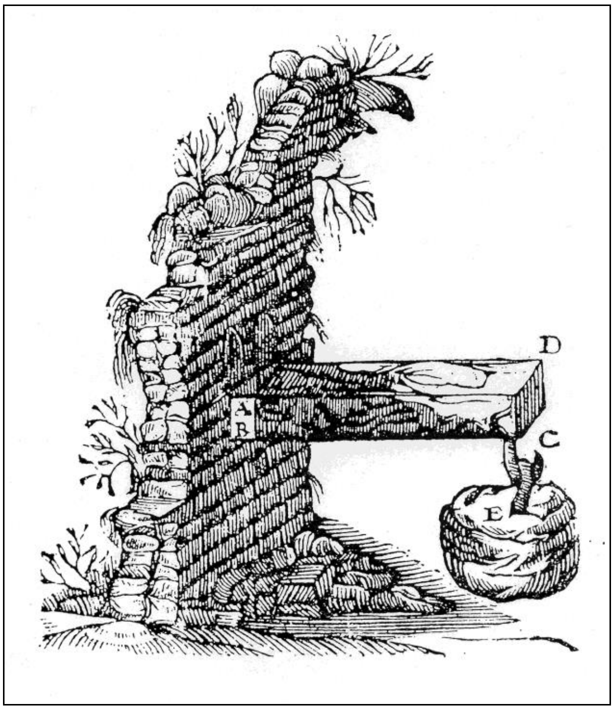


Intuizione leonardesca dell'esistenza dell'*asse neutro*

Come scrisse, in altro contesto, Duhem, anche questa verità, apparsagli in un istante, "*si inabissava nuovamente, attendendo dal futuro chi l'avrebbe definitivamente tirata a riva* ".

Galileo, nel fondare la Scienza delle Costruzioni (*Discorsi* 1638), riporta l'osservazione riguardo al fatto che una trave resiste assai di più se il carico agisce assialmente per trazione, invece di agire perpendicolarmente all'estremo libero della stessa trave incastrata come una mensola.

Galileo imposta il suo calcolo allo stato limite: il comportamento della mensola è ridotto a quello di una leva angolare ove il fulcro è posto - erroneamente, essendosi perduta l'intuizione leonardesca - all'intradosso della trave nella sezione d'incastro. Il problema è affrontato esclusivamente in chiave di equilibrio dei momenti.



La trave di Galileo

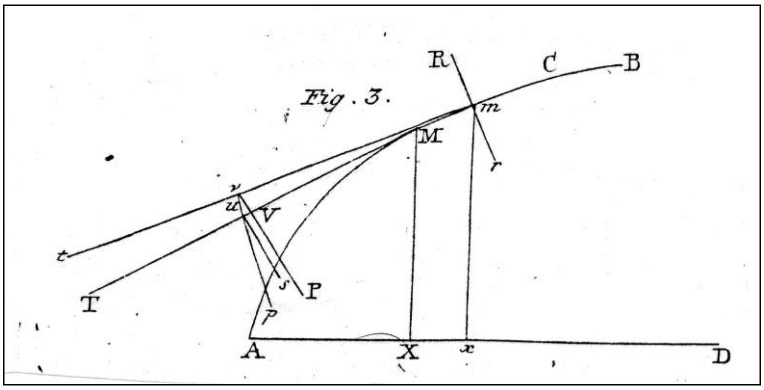
Dopo la scoperta dell'analisi infinitesimale, Jacques Bernoulli, nel 1694, affrontò nuovamente il problema della mensola di Galileo indagando, grazie al nuovo strumento, sulla figura della trave deformata, fondandosi sulla proporzionalità tra la curvatura nel punto ed il momento flettente. L'autore sottolinea il fatto che, rispetto al precedente problema della catenaria - risolubile mediante l'equilibrio delle forze o l'equilibrio dei momenti - questo nuovo problema dell'*elastica* sembrava affrontabile unicamente in chiave di equilibrio dei momenti.

Solo nel 1771 Eulero risolverà l'enigma: nel caso generale *entrambe* le equazioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione dovranno essere considerate; egli ottiene così quelle equazioni di equilibrio in forma differenziale che costituiscono il fondamento della moderna meccanica strutturale.

Come noto Eulero ritrascrisse in forma differenziale la meccanica newtoniana giungendo alle cosiddette

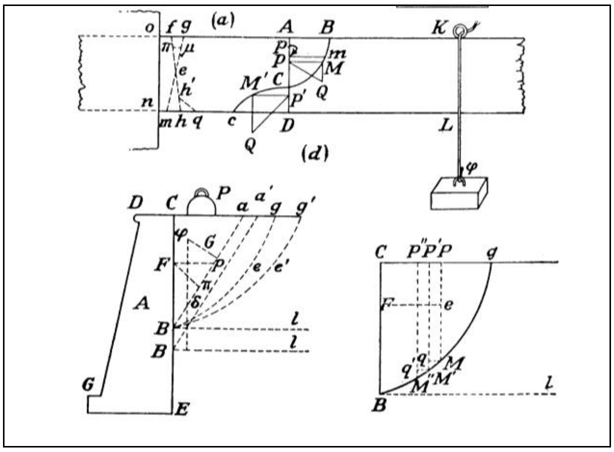
equazioni cardinali della meccanica quali principi indipendenti che devono valere per ogni porzione materiale: nel caso statico si ottengono appunto le due equazioni di equilibrio delle forze e dei momenti.

Eulero imposterà le sue soluzioni sull'azione interna risultante (che in una trave - a differenza di ciò che avviene in una fune - non solo non è sempre diretta come la tangente ma a volte è anche esterna alla trave stessa), prescindendo dalla effettiva distribuzione delle tensioni.



Le componenti dell'azione interna nella riflessione di Eulero

Coulomb nel 1773 - senza essere a conoscenza di un precedente risultato di Parent - ricavò la formula corretta che lega tensione normale elastica e momento flettente in una trave di sezione rettangolare.



Disegni tratti dalla memoria di Coulomb del 1773

Nel 1826 è pubblicato l'insegnamento del Navier all'*Ecole des ponte et chaussées*. E' abbandonato il metodo galileiano fondato sul calcolo a rottura e sono indagate invece le strutture elastiche: le equazioni differenziali di Bernoulli e di Eulero sono semplificate, applicando la cosiddetta *linearizzazione*.

Navier può in tal modo risolvere le prime strutture iperstatiche: la mensola con appoggio terminale e la trave su più appoggi (quest'ultimo problema era di antichissima formulazione, apparendo già nelle *Questioni Meccaniche* di Aristotele ove è risolto per il caso di due appoggi e riproposto nella *Meccanica* di Erone).

Procedimenti generali per la soluzione delle strutture iperstatiche sono dovuti a:

- Clebsh (1862): metodo di calcolo detto *degli spostamenti* (alla base della maggior parte delle trattazioni computerizzate moderne degli elementi finiti);

- Maxwell (1864): metodo di calcolo detto *delle forze*, compiutamente sviluppato in un densissimo articolo apparso sul Philosophical Magazine, nel quale è pure enunciato il celebre teorema di reciprocità che Betti estenderà od ogni corpo elastico;

- Castigliano (1875): metodo di calcolo fondato su un procedimento *energetico*: i teoremi da lui scoperti, permettono di esprimere gli spostamenti dovuti alla deformazione elastica in termini delle forze agenti sulla struttura.

Analogamente, la teoria dell'*ellisse di elasticità* ideata da Culmann ed applicata sistematicamente da Ritter dà il mezzo di esprimere gli spostamenti dovuti sia ai carichi sia alle reazioni sovrabbondanti.

Entrambi i metodi di Castigliano e di Ritter risolvono il problema dell'arco doppiamente incastrato senza introdurre le semplificazioni delle metodologie del passato, volte a trasformarlo in struttura isostatica (come quella del Mery, che studia l'arco come se in esso fossero effettivamente presenti le tre lesioni che sperimentalmente erano state rilevate in archi reali).